SYNTHESES DU COURS

SPECIALITE MATHS

Mode examen (TI) (épreuve de 4h coefficient 16)

Entrée : **annul** + **entrer** + **on**

(en simultané et calculatrice éteinte)

Sortie méthode 1:

1. Commencez par mettre une calculatrice en mode réception à l'aide des touches 2nde + X,T,θ,n (échanger)
2. Puis mettez la seconde calculatrice en mode envoi à l'aide des touches 2nde + X,T,θ,n (échanger) et sélectionnez un élément à envoyer (exemple : une liste vide).
3. Sélectionnez le fichier à transmettre puis envoyez-le à l'autre calculatrice.

Les calculatrices sont sorties du mode examen !

Sortie méthode 2:

- Branchez votre calculatrice à l'ordinateur à l'aide du câble mini USB vers USB fourni.
- Démarrez le logiciel TI Connect™ CE.
- Ouvrez l'explorateur de fichiers de la calculatrice sur TI Connect™ CE.
- Copiez un élément (exemple : une liste vide) de votre calculatrice sur votre ordinateur.
- Puis, réimportez ce fichier dans votre calculatrice.

Votre calculatrice est sortie du mode examen !

Important : lors de l'épreuve, les surveillants feront un 1er tour de salle et vérifieront que les calculatrices ne sont pas en mode examen puis demanderont alors aux candidats de mettre leur calculatrice en mode examen et feront un 2ème tour de salle. Il ne faut donc pas anticiper et mettre sa calculatrice en mode examen bien avant l'épreuve…

Grand Oral (coefficient 10)

Le candidat propose deux questions en lien avec les 2 spécialités étudiées pendant l'année (questions validées par l'établissement scolaire).

Conseil : il peut être intéressant de prévoir une question où interviennent les 2 spécialités.

Les examinateurs choisissent une question. Le candidat dispose de 20 minutes de préparation pendant lesquels le candidat peut concevoir un support écrit. (brouillon fourni-pas de calculatrice)

Ensuite pendant 10 minutes, le candidat répond à la problématique posée et peut , s'il le souhaite, montrer certaines feuilles de son support écrit (sans les donner).*L'oral est ainsi plus dynamique et plus agréable pour les profs de sciences..*

Les 10minutes restantes sont réservées aux questions du jury. Il peut alors être intéressant (valorisant)de prendre l'initiative d'utiliser un feutre et d'agrémenter sa prestation orale de certaines précisions écrites au tableau.

Conseil : il peut être intéressant de ne pas tout expliciter dans la 1ère partie (en garder sous le coude) et d'anticiper certaines questions que le jury ne manquera de poser dans la 2ème partie (démonstrations – courbes ….) et d'y répondre à l'aide du tableau.

<u>Remarques :</u> Le grand oral est un **oral de maturité** et doit donc témoigner d'une **appropriation personnelle des savoirs acquis** en spécialité.
Les questions liées à l'orientation ne font plus partie de l'épreuve.
Exemple de grille d'évaluation :

CANDIDAT NOM : Prénom :	**Qualité orale de l'épreuve** *Indicateur de réussite du niveau Très Satisfaisant* *-La voix est audible,* *-L'attention est captée,* *-Le vocabulaire est riche et précis.*				**Qualité de la prise de parole en continu** *Indicateur de réussite du niveau Très Satisfaisant* -Discours fluide, -Discours efficace et bien construit, -Temps respecté.				**Qualité des connaissances** *Indicateur de réussite du niveau Très Satisfaisant* *-Les connaissances sont maitrisées.*				**Qualité et construction de l'argumentation** *Indicateur de réussite du niveau Très Satisfaisant* *-Le sujet est maitrisé,* *-L'argumentation est bien construite.*				**Qualité de l'interaction** *Indicateur de réussite du niveau Très Satisfaisant* *-La communication est de grande qualité et repose sur un équilibre des échanges entre le candidat et le jury.*			
Niveau d'évaluation	TS	S	I	TI	TS	S	I	TI	TS	S	I	TI	TS	S	I	TI				
1er temps Présentation de la question et de son traitement(																				
Remarques sur le 1er temps																				
Niveau d'évaluation	TS	S	I	TI	TS	S	I	TI	TS	S	I	TI	TS	S	I	TI	TS	S	I	TI
2ème temps Echanges Avec le candidat sur la question																				
Remarques sur le 2ème temps.																				
Appréciation sur l'ensemble du GO															**NOTE /20**					

Liste des chapitres

Table des matières

Thème 4 : les fonctions de référence (sans les limites)

Thème 5 : Intégration

Thème 6 : géométrie dans l'espace

Thème 7 : dénombrement et probabilité

Automatisme 1 : fractions- puissances-propriétés algébriques d'exp

Fractions : vidéo : mathssa.fr/coursfrac

Propriétés : Pour tout nombre *a, b, c* et *d*, réels on a :

$\frac{a}{D}+\frac{b}{D}=\frac{a+b}{D}$ $\frac{a}{D}-\frac{b}{D}=\frac{a-b}{D}$ $\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{a\times c}{b\times d}$

$\frac{1}{\frac{a}{b}}=\frac{b}{a}$ $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}=\frac{a\times d}{b\times c}$

$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad}{bd}+\frac{bc}{bd}=\frac{ad+bc}{bd}$

Exemple 1 : Réduire l'expression suivante au même dénominateur $\frac{1}{4}-\frac{2}{3}$

$$\frac{1}{4}-\frac{2}{3}=\frac{1\times3}{4\times3}-\frac{2\times4}{3\times4}=\frac{3}{12}-\frac{8}{12}=\frac{3-8}{12}=-\frac{5}{12}$$

Exemple 2 : Montrer que pour tout réel $x\neq-3$, $\frac{4x+11}{x+3}=4-\frac{1}{x+3}$ vidéo : mathssa.fr/denomin

$$4-\frac{1}{x+3}=\frac{4}{1}-\frac{1}{x+3}$$

$$=\frac{4(x+3)}{x+3}-\frac{1}{x+3}$$

$$=\frac{4(x+3)-1}{x+3}$$

$$=\frac{4x+12-1}{x+3}$$

$$=\frac{4x+11}{x+3}$$

Exemple 3 : Réduire l'expression suivante au même dénominateur A= $\frac{7x}{x-2}-\frac{5}{3-x}$

$$A=\frac{7x}{x-2}-\frac{5}{3-x}$$

$$=\frac{7x(3-x)}{(x-2)(3-x)}-\frac{5(x-2)}{(3-x)(x-2)}$$

$$=\frac{7x(3-x)-5(x-2)}{(x-2)(3-x)}$$

$$=\frac{21x-7x^2-5x+10}{(x-2)(3-x)}$$

$$=\frac{-7x^2+16x+10}{(x-2)(3-x)}$$

Pour s'entrainer : Facile : bref.jeduque.net/10vuo2 , bref.jeduque.net/ik6h96 , bref.jeduque.net/3tivpz ,mathssa.fr/sommefrac , mathssa.fr/multdivfrac , mathssa.fr/frac

A privilégier :mathssa.fr/denomniv1 et mathssa.fr/denomniv2

Puissances vidéo : mathssa.fr/courspuiss

$a^1 = a$ pour tout nombre a
$a^0 = 1$ pour tout nombre a non nul
$0^p = 0$ pour tout entier relatif p non nul
$1^p = 1$ pour tout entier relatif p

Propriétés : n et p deux entiers relatifs

$a^n \times a^p = a^{n+p}$ $\quad \frac{a^n}{a^p} = a^{n-p}$ $\quad (a^n)^p = a^{n\times p}$

$(a \times b)^n = a^n \times b^n$ $\quad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

$a^{-1} = \frac{1}{a}$ $\quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

Vidéo : mathssa.fr/exospuiss

Exprimer sous la forme d'une seule puissance :

$A = 4^5 \times 4^7$
$= 4^{5+7}$
$= 4^{12}$

$B = \frac{5^6}{5^4}$
$= 5^{6-4}$
$= 5^2$

$C = (8^2)^3$
$= 8^{2\times 3}$
$= 8^6$

$D = 6^7 \times 9^7$
$= (6 \times 9)^7$
$= 54^7$

$E = \frac{1}{3^5}$
$= 3^{-5}$

$F = 7^3 \times (7^2)^6$
$= 7^3 \times 7^{2\times 6}$
$= 7^3 \times 7^{12}$
$= 7^{3+12}$
$= 7^{15}$

Pour s'entrainer : bref.jeduque.net/am47w4 , bref.jeduque.net/hpb8b9
mathssa.fr/puiss et mathssa.fr/puiss2

Propriétés : Pour tous réels x et y et pour tout entier relatif n, on a

$e^{x+y} = e^x e^y$ $\quad e^{-x} = \frac{1}{e^x}$ $\quad e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$ $\quad e^{nx} = (e^x)^n$

Pour s'entrainer : mathssa.fr/expalg , mathssa.fr/expalg2 et mathssa.fr/expalg3

Exemple plus difficile: prouver une égalité comportant de l'exponentielle

Démontrer que pour tout réel x, $\frac{1}{1+e^{-x}} = \frac{e^x}{e^x+1}$

Pour tout x réel , $\frac{1}{1+e^{-x}} = \frac{1}{1+\frac{1}{e^x}}$

$= \frac{1}{\frac{e^x}{e^x}+\frac{1}{e^x}}$

$= \frac{1}{\frac{e^x+1}{e^x}}$

$= \frac{e^x}{e^x+1}.$

Exemple plus difficile : comparer des expressions contenant des puissances

Comparer $A = -3 \times 0{,}4^{n+1}$ et $B = -3 \times 0{,}4^n$ (n entier naturel)

$A - B = (-3 \times 0{,}4^{n+1}) - (-3 \times 0{,}4^n)$

$= -3 \times 0{,}4^{n+1} + 3 \times 0{,}4^n$

$= -3 \times 0{,}4^{n+1} + 3 \times 0{,}4^n$

$= -3 \times 0{,}4^n \times 0{,}4^1 + 3 \times 0{,}4^n$

$= 3 \times 0{,}4^n \times (-0{,}4 + 1)$ on factorise par $3 \times 0{,}4^n$

$= 1{,}8 \times 0{,}4^n$ Or $1{,}8>0$ et $0{,}4^n>0$.

On en déduit que $1{,}8 \times 0{,}4^n >0$ et donc A-B>0 et donc A>B .

Automatisme 2 : développements-factorisations

Propriétés :

$$k\,(a+b) = k\,a + kb$$

$$k\,(a-b) = k\,a - kb$$

$$(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$$

développement →

← factorisation

Pour s'entrainer : mathssa.fr/doubledistri2 , mathssa.fr/doubledistrirac , mathssa.fr/factor**1** **et** mathssa.fr/factor**2**

Propriétés :
Pour tous nombres a et b,

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

développement →

← factorisation

Remarque : *en pratique , reconnaitre l'identité remarquable puis ECRIRE la valeur de a et de b.*

Quelques factorisations

$$\mathbf{4x^2+4x+1} = \overset{a^2}{(2x)^2} + 2 \times 2x \times 1 + \overset{b^2}{1^2} \qquad \boldsymbol{a = 2x}\ , \quad \boldsymbol{b = 1}$$

$$= \boldsymbol{(2x+1)^2}$$

$$\overset{a^2}{\boldsymbol{(x-1)^2}} - \overset{b^2}{\boldsymbol{(2x+3)^2}} = \boldsymbol{((x-1)+(2x+3))((x-1)-(2x+3))} \qquad \boldsymbol{a = x-1}\ , \ \boldsymbol{b = 2x+3}$$

$$= \boldsymbol{(x-1+2x+3)(x-1-2x-3)}$$

$$= \boldsymbol{(3x+2)(-x-4)}$$

$$3(x-2)(x+7) - 2(\overset{a^2}{x^2} - \overset{b^2}{4}) = 3(x-2)(x+7) - 2(x^2 - 2^2) \qquad a = x \text{ et } \ b = 2$$

$$= \boldsymbol{3(x-2)(x+7) - 2(x-2)(x+2)}$$

$$= \boldsymbol{(x-2) \times 3(x+7) - (x-2) \times 2(x+2)}$$

$$= \boldsymbol{(x-2)(3(x+7) - 2(x+2))}$$

$$= (x-2)(3x+21-2x-4)$$

$$= (x-2)(x+17)$$

Pour s'entrainer aux développements : mathssa.fr/developidrem , mathssa.fr/mentalident , mathssa.fr/developidrem2 Et mathssa.fr/formes. Pour s'entrainer aux factorisations : mathssa.fr/factoridentrem , mathssa.fr/factoridentrem2 et mathssa.fr/factoridentrem3

<u>Automatisme 3 : équations et inéquations du 1er et du 2d degré</u>

Equation du type $\frac{x}{a} = \frac{b}{c}$: mathssa.fr/proporequa (on utilisera l'égalité des produits en croix)
Isoler une variable dans une égalité : mathssa.fr/litteral1 , mathssa.fr/litteral2 , mathssa.fr/litteral3

Liens vidéos : mathssa.fr/equadeg1 , mathssa.fr/resolequa et mathssa.fr/resolequa2

Résolution d'une équation du 1er degré à une inconnue

Résoudre dans $\mathbb{R}$: $3(x+4) = -x - 3$

$3(x+4) = -x-3$

$\Leftrightarrow$ $3x + 12 = -x - 3$ On applique la distributivité

$+x$ $+x$

$\Leftrightarrow$ $3x + x + 12 = -3$ On ajoute x à chaque membre

$\Leftrightarrow$ $4x + 12 = -3$

-12 -12

$\Leftrightarrow$ $4x = -3 - 12$ On ajoute -12 à chaque membre

$\Leftrightarrow$ $4x = -15$

$\Leftrightarrow$ $x = \frac{-15}{4}$ On divise chaque membre par 4

L'ensemble des solutions de cette équation est S= $\{-\frac{15}{4}\}$

Entrainement : http://bref.jeduque.net/5tjyul http://bref.jeduque.net/palipc http://bref.jeduque.net/ckjtm1
mathssa.fr/equa1 , mathssa.fr/equa2 , mathssa.fr/equa3 mathssa.fr/equa4 et mathssa.fr/equa5 (problèmes)

Résolution d'une inéquation du 1er degré à une inconnue

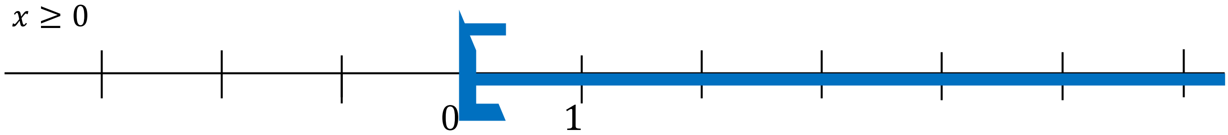
Propriété : multiplier ou diviser par un réel négatif
On peut multiplier ou diviser chaque membre d'une inégalité par un nombre négatif mais l'inégalité change de sens

1.Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $3x \geq 0$

$3x \geq 0$

$\Leftrightarrow$ $x \geq \frac{0}{3}$ On divise chaque membre par 3

$\Leftrightarrow$ $x \geq 0$



L'ensemble des solutions de cette inéquation est S=[0 ;+∞[.

2.Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $-2x + 7 > 4x - 8$.

$-2x + 7 > 4x - 8$

$-4x$ $-4x$

$\Leftrightarrow$ $-2x - 4x + 7 > -8$ On ajoute -4x à chaque membre

$\Leftrightarrow$ $-6x + 7 > -8$

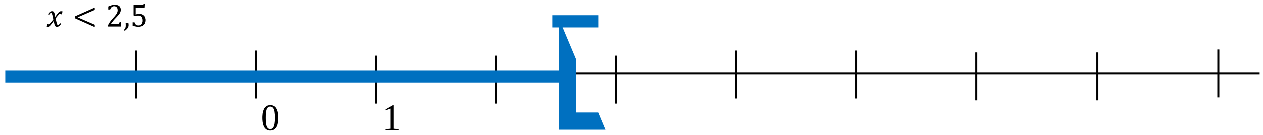
-7 -7

$\Leftrightarrow$ $-6x > -8 - 7$ On ajoute -7 à chaque membre

$\Leftrightarrow$ $-6x > -15$

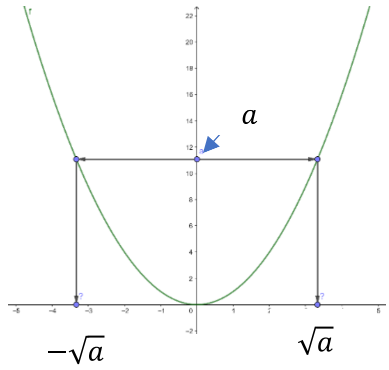
$\Leftrightarrow$ $\frac{-6x}{-6} < \frac{15}{-6}$ On divise chaque membre par -6<0

$\Leftrightarrow$ $x < 2,5$



L'ensemble des solutions de cette inéquation est $S =]-\infty; 2,5[$. Pour s'entrainer : mathssa.fr/inequa

Résolution d'une équation du second degré du type $x^2 = a$



Propriété : Soit $a > 0$
L'équation $x^2 = a$ admet exactement deux solutions : $-\sqrt{a}$ *et* $\sqrt{a}$

Remarque : lorsque $a < 0$, l'équation $x^2 = a$ n'admet aucune solution.

Application : Vidéo : mathssa.fr/facto5

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations : i) $x^2 = 3$ ii) $x^2 = -1$ iii) $(x-3)^2 = 9$

$i) x^2 = 3 \Leftrightarrow x = -\sqrt{3}$ ou $x = \sqrt{3}$

L'ensemble des solutions de cette équation est S= $\{-\sqrt{3}\,;\sqrt{3}\}$

ii) L'équation $x^2 = -1$ n'a pas de solutions réelles . L'ensemble des solutions de cette équation est S= $\emptyset$

iii) $(x-3)^2 = 9$
$\Leftrightarrow x - 3 = -\sqrt{9}$ ou $x - 3 = \sqrt{9}$
$\Leftrightarrow x - 3 = -3$ ou $x - 3 = 3$
$+3 \quad +3 \qquad +3 \quad +3$

$\Leftrightarrow x = -3 + 3 = 0$ *ou* $x = 3 + 3 = 6$ L'ensemble des solutions de cette équation est S= $\{0; 6\}$

Pour s'entrainer : http://bref.jeduque.net/sca2gs et mathssa.fr/equaxcarre

Résolution d'une équation du second degré du type $ax^2 + bx + c = 0$

Vidéo : mathssa.fr/seconddegre2 (de 0 à 6mns)

Propriété : Soit le **polynôme du second degré** ax^2+bx+c. Soit Δ son **discriminant** $\Delta = b^2 - 4ac$

- si $\Delta < 0$ alors l'équation du second degré $ax^2+bx+c=0$ n'a pas de solution réelle.
- si $\Delta = 0$ alors l'équation du second degré $ax^2+bx+c=0$ *a* une unique solution : $x_0 = -\frac{b}{2a}$.
- si $\Delta > 0$ alors l'équation du second degré $ax^2+bx+c=0$ a deux solutions distinctes :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ ou } x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Exercice d'application : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes:

a) $x^2 - 3x + 4 = 0$

a = 1 *b = -3* *c = 4*

$\Delta = (-3)^2 - 4 \times 1 \times 4$

$= 9-16$

$= -7$

$\Delta < 0$ donc l'équation $\mathbf{x^2 - 3x + 4 = 0}$ **n'a pas de solution réelle**

S = $\emptyset$

b) $5x^2 - 70x + 245 = 0$

a = 5 *b = -70* *c = 245*

$\Delta = (-70)^2 - 4 \times 5 \times 245$

$= 4900-4900$

$= 0$

$\Delta = 0$ donc l'équation $\mathbf{5x^2 - 70x + 245 = 0}$ *a* une unique solution : $x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{-70}{10} = 7$.

S = $\{7\}$

c) $-3x^2 + x + 4 = 0$

a = -3 *b = 1* *c = 4*

$\Delta = 1^2 - 4 \times (-3) \times 4 = 1+48$

$= 49$

$\Delta > 0$ donc l'équation $\mathbf{-3x^2 + x + 4 = 0}$ a deux solutions distinctes :

$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1-\sqrt{49}}{2\times(-3)} = \frac{-1-7}{-6} = \frac{4}{3}$

ou $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1+7}{-6} = -1$

S = $\{\frac{4}{3}\,; -1\}$

Pour s'entrainer : mathssa.fr/equadegre2 et plus difficile : mathssa.fr/equadegre2par

Signe d'une fonction du second degré et résolution d'inéquations du second degré

Propriété :

Soit le **polynôme du second degré** $f(x) = ax^2 + bx + c$. Son discriminant est $\Delta = b^2 - 4ac$.

- si $\Delta < 0$ alors f est du signe de a.

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f(x) = ax^2 + bx + c$	signe de a

- si $\Delta = 0$ alors f est du signe de a sauf en x_0 où elle s'annule.

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
$f(x) = ax^2 + bx + c$		signe de a	0	signe de a	

- si $\Delta > 0$ alors f est du signe de a *« à l'extérieur de ses racines ».*

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f(x) = ax^2 + bx + c$		*signe de a*	*0*	*signe de -a*	*0*	*signe de a*	

(si $x_1 < x_2$)

Exemple : résoudre l'inéquation : $x^2 + 3x - 4 < 0$

a = 1 $\qquad$ *b = 3* $\qquad$ *c = -4*

$\Delta = \quad 3^2 - 4 \times 1 \times (-4) = 25$

$\Delta > 0$ donc le polynome du second degré $\boldsymbol{x^2 + 3x - 4}$ a deux racines distinctes :

$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3-\sqrt{25}}{2\times1} = \frac{-3-5}{2} = -4$ ou $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3+5}{2} = 1$

$\boldsymbol{x^2 + 3x - 4}$ est du signe de $\boldsymbol{a = 1}$ à l'extérieur des racines

On obtient le tableau de signes :

x	$-\infty$		-4		1		$+\infty$
$f(x) = x^2 + 3x - 4$		+	*0*	-	*0*	+	

L'ensemble des solutions de l'inéquation $x^2 + 3x - 4 < 0$ est donc $S =]-4; 1[$.

Pour s'entrainer : mathssa.fr/inequadegre2 et mathssa.fr/bilandegre2

Automatisme 4 : systèmes de 2 équations du 1er degré à 2 inconnues

Vidéo :mathssa.fr/introsyst

a)la méthode de substitution

Vidéo : mathssa.fr/systeme (de 3mns 52s à 8mns30s)

Méthode générale :
Dans une équation , on exprime une **inconnue** en fonction de l'autre puis on remplace cette inconnue dans la 2ème équation**.**

Résoudre le système $(\mathcal{S})$: $\begin{cases} x + 3y = 15 \\ 2x + y = 10 \end{cases}$

$$(\mathcal{S}) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3y + 15 \\ 2(-3y + 15) + y = 10 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -3y + 15 \\ -6y + 30 + y = 10 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -3y + 15 \\ -5y = 10 - 30 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -3y + 15 \\ -5y = -20 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -3y + 15 \\ y = \dfrac{-20}{-5} = 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \times 4 + 15 = 3 \\ y = 4 \end{cases}$$

L'ensemble des solutions de ce système est :

$S = \{(3\,;4)\}$

Pour s'entrainer : mathssa.fr/syst
Vérification à l'aide de la calculatrice :
Appuyer sur resol puis Plysmlt2 et 2

b.la méthode par combinaison linéaire

Vidéo : mathssa.fr/systeme (de 8mns25s à 13mns10s)

Méthode générale :
Souvent la méthode par substitution a l'inconvénient de faire apparaitre des rationnels. Une autre méthode peut etre plus intéressante.
On peut « combiner » les deux équations afin de faire disparaitre une inconnue dans une des deux équations.

Résoudre le système suivant : $\begin{cases} 3x - 2y = 5 \\ 5x + 3y = 2 \end{cases}$

Remarque : Ici, la méthode de substitution ne se prête pas à la résolution du système car en isolant une inconnue, on ramène les équations à des coefficients rationnels. Ce qui compliquerait considérablement les calculs.

On multiplie la première équation par 5 et la deuxième équation par 3 dans le but d'éliminer une inconnue par soustraction ou addition des deux équations.

$$\begin{matrix} \times 5 \\ \times 3 \end{matrix} \begin{cases} 3x - 2y = 5 \\ 5x + 3y = 2 \end{cases}$$

On soustraie les deux premières équations. Ici, on élimine l'inconnue x.

$$\begin{matrix} \\ - \end{matrix} \begin{cases} 15x - 10y = 25 \\ 15x + 9y = 6 \end{cases}$$

$$15x - 15x - 10y - 9y = 25 - 6$$

On résout l'équation obtenue pour trouver l'inconnue y.

$$-19y = 19$$
$$y = -1$$

On substitue dans une des équations du système la valeur ainsi trouvée pour y et on calcule la valeur de l'autre inconnue.

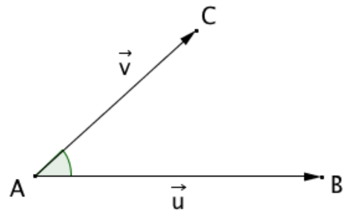
$$3x - 2 \times (-1) = 5$$
$$3x + 2 = 5$$
$$3x = 5 - 2$$
$$3x = 3$$
$$x = 1$$

L'ensemble des solutions de ce système est :
$S = \{(1\,;\,-1)\}$

Automatismes 5 : produit scalaire dans le plan

1ère formule du produit scalaire:
Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan.
On appelle **produit scalaire** de $\vec{u}$ par $\vec{v}$, noté $\vec{u}.\vec{v}$, le nombre réel défini par :

- $\vec{u}.\vec{v} = 0$, si l'un des deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est nul
- $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times cos(\vec{u}\ ;\ \vec{v})$, dans le cas contraire.

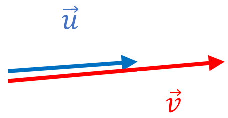


Cas particuliers :

- Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont deux représentants des vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ alors :

$\vec{u}.\vec{v} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AC}\| \times \cos(\widehat{BAC})$
Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont des vecteurs colinéaires de même sens ,

$$\vec{u}.\vec{v} = (\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(0)) = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$$



- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont des vecteurs colinéaires de sens contraire ,

$\vec{u}.\vec{v} = (\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\pi)) = -\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$

- $\vec{u}.\vec{u} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{u}\| = \|\vec{u}\|^2$

$\vec{u}.\vec{u}$ se note aussi $\vec{u}^2$ et est appelé carré scalaire de $\vec{u}$.
$\vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2$

Propriété de symétrie : Pour tout vecteur $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on a : $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$

Propriétés de bilinéarité : Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$, on a :
1) $\vec{u}.(\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w}$
2) $\vec{u}.(k\vec{v}) = (k\vec{u}).\vec{v} = k \times \vec{u}.\vec{v}$, avec k un nombre réel.

Propriétés (identités remarquables): Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on a :
1) $(\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u}.\vec{v} + \vec{v}^2$
2) $(\vec{u} - \vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u}.\vec{v} + \vec{v}^2$
3) $(\vec{u} + \vec{v}).(\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$

Formules de polarisation Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs. On a :

$\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2\right)$

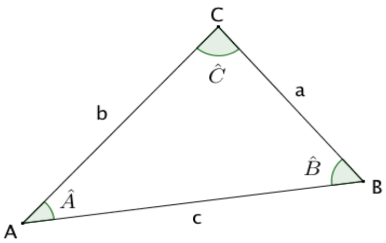
Et $\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right)$

2ème formule du produit scalaire:

Soit A, B et C trois points du plan. On a :$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2 - BC^2)$

Théorème d'Al Kashi :
Dans un triangle ABC, on a, avec les notations de la figure :

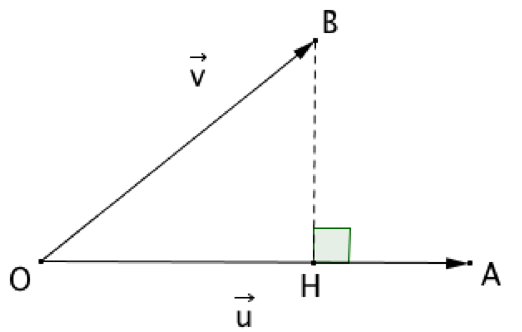
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\hat{A}$$



Propriété :
Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u}.\vec{v} = 0$.

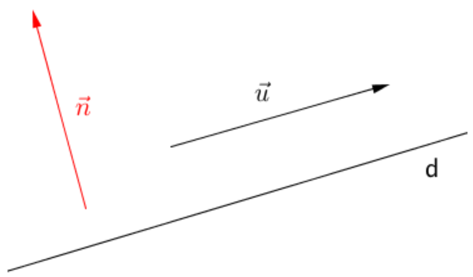
3ème formule du produit scalaire :
Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls du plan tels que $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$.
H est le projeté orthogonal du point B sur la droite (OA).

On a : $\vec{u}.\vec{v} = \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OH}$



4ème formule du produit scalaire
Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de coordonnées respectives $(x\,;y)$ et $(x'\,;y')$.
On a : $\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy'$.

Définition : Soit une droite *d*.
On appelle **vecteur normal** à une droite *d*, un vecteur non nul orthogonal à un vecteur directeur de *d*.



Vecteur directeur d'une droite :
Un vecteur directeur d'une droite d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$ est $\vec{u}(-b\,;a)$.

Propriétés :
- Une droite de vecteur normal $\vec{n}(a\,;b)$ admet une équation cartésienne de la forme $ax + by + c = 0$ où c est un nombre réel à déterminer.
- Réciproquement, la droite *d* d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$ admet le vecteur $\vec{n}(a\,;b)$ pour vecteur normal.

Méthode : Déterminer une équation de droite connaissant un point et un vecteur normal

Vidéo : mathssa.fr/vn 3mns47s
Dans un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ du plan, on considère la droite *d* passant par le point $A(-5\,;4)$ et dont un vecteur normal est le vecteur $\vec{n}(3\,;-1)$.
Déterminer une équation cartésienne de la droite *d*.

Comme $\vec{n}(3\,;-1)$ est un vecteur normal de *d*, une équation cartésienne de *d* est de la forme $3x - y + c = 0$
Le point $A(-5\,;4)$ appartient à la droite *d*, donc : $3 \times (-5) - 4 + c = 0$ et donc :
$c = 19$.Une équation cartésienne de *d* est : $3x - y + 19 = 0$.
Pour s'entrainer : mathssa.fr/equdroitevn , mathssa.fr/equdroitevn2 et mathssa.fr/coordprojete

Automatisme 6 : algorithmique

Remarque importante: *ne pas hésiter à construire un tableau avec les variables et les valeurs associées à chaque étape de l'algorithme* ***(tableau d'état des variables)***

Différents types de variables

Nom du type	Mot clé en Python	Exemple
entier relatif (integer)	int	a=4
nombre décimal (flottant)	float	a=2.3
texte ou chaine de caractères (string)	str	a="bonjour"

booléen	bool	`>>> a=(6>5)`
		`>>> a`
		`True`
		`>>> type(a)`
		`<class 'bool'>`

liste	list
	
	Cette instruction permet d'extraire un élément de la liste (attention le 1er élément est 0)
	
	Ces deux instructions Permettent d'ajouter un nouvel élément à la liste
		`>>> a=[1,2,3]`
		`>>> a`
		`[1, 2, 3]`
		`>>> a[0]`
		`1`
		`>>> type(a)`
		`<class 'list'>`
		`>>> a=a+[4]`
		`>>> a`
		`[1, 2, 3, 4]`
		`>>> a.append(5)`
		`>>> a`
		`[1, 2, 3, 4, 5]`

la virgule devient un point sur python

a contient le test (6>5).

Sa valeur est Vrai

Exemple de programme:

```
x=5
x=2*x
x=x+1
```

Etat des variables

x
5
10
11

11 est la dernière valeur stockée par la variable x

Commande	Donne
`a+b`	Somme de `a` et `b`
`a-b`	Différence entre `a` et `b`
`a*b`	Produit de `a` par `b`
`a/b`	Quotient de `a` par `b` sous forme de flottant
`a//b`	Quotient dans la division euclidienne de `a` par `b`
`a%b`	Reste dans la division euclidienne de `a` par `b`

Commande	Donne
`x**n`	`x` à la puissance `n`
`abs(x)`	La valeur absolue de `x`
`int(x)`	La partie entière de `x`
`round(x,n)`	La valeur arrondie de `x` à `n` décimales

Les bibliothèques

- Une **bibliothèque** est un **ensemble de fonctions et de constantes** (comme π) prêtes à être utilisées. Il existe une multitude de bibliothèques ayant chacune sa **thématique** propre.
- Pour en utiliser une, il faut la **charger** dans le programme. On dit alors qu'**on importe la bibliothèque**.

a)La bibliothèque math

▸ La bibliothèque **math** regroupe de nombreuses **fonctions et constantes mathématiques.**

▸ La fonction nommée **sqrt** permet de calculer la racine carrée d'un nombre, la constante nommée **pi** donne la valeur approchée de π.

Exemple : dans la ligne 1, on importe toutes les méthodes de la bibliothèque math.
Dans la ligne 2, on affecte $\sqrt{2}$ à la variable a.
Dans la ligne 3, on affecte une valeur approchée de π à la variable b.

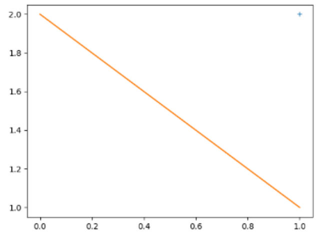
```
1 from math import*
2 a=sqrt(2)
3 b=pi
```

Remarque : on peut également calculer les sinus, cosinus et tangente d'un angle avec les fonctions sin, cos et tan.

b) La bibilothèque pylab ou matplotlib

La bibliothèque pylab ou matplotlib regroupe des outils pour tracer et visualiser des données sous forme de graphiques.
Exemple : dans la ligne 1, on importe la bibliothèque pylab.
Dans la ligne 2, on place sur le graphique le point de coordonnées (1 ;2). Le paramètre « + » permet d'obtenir une croix.
Dans la ligne 3, on trace le segment passant par les points de coordonnées (0 ;2) et (1 ;1). Notons qu'il faut mettre les abscisses entre crochets puis les ordonnées.
Dans la ligne 4, l'instruction show() permet d'afficher toutes les figures.

```
0 # Créé par ORDI, le 28/(
1 from pylab import*
2 plot(1,2,"+")
3 plot([0,1],[2,1],'-')
4 show()
```



c)La bibliothèque random

lienmini.fr/10557-07

▸ La bibliothèque **random** permet de créer des **nombres aléatoires.** Elle contient en particulier la fonction **random** qui génère un nombre aléatoire entre 0 et 1 (1 exclu) et la fonction **randint** qui génère un **entier** aléatoire entre deux bornes (leurs valeurs incluses).

Exemple : dans la ligne 1, on importe la bibliothèque random.
Dans la ligne 2, on affecte un nombre aléatoire compris entre 0 et 1 (1 exclu) à la variable a.
Dans la ligne 3, on affecte un nombre aléatoire compris entre 1 et 6 (1 et 6 inclus) à la variable b.

```
1 from random import*
2 a=random()
3 b=randint(1,6)
```

Les fonctions (création-appel) vidéo :mathssa.fr/fonctionpython

▸ Une **fonction**, en programmation, est un sous-programme qu'on peut utiliser à volonté dans le programme principal.

▸ Écrire des fonctions permet d'**organiser** et de **simplifier** les **programmes**.

▸ Une fonction a un **nom**, peut prendre des valeurs en entrée données sous la forme de variables **appelées arguments** ou **paramètres**, et peut renvoyer un ou plusieurs résultats. En langage Python, elle est structurée de la manière suivante :

Mot-clé def — Nom de la fonction — Paramètres

```
1 def nomDeLaFonction(a,b,…):
2     instruction1
3     instruction2
4     …
5     return resultat
```

Indentation — Mot-clé return pour renvoyer un résultat

Remarques importantes: en informatique, l'**indentation** consiste en l'ajout de tabulations ou d'espaces dans un fichier, pour une meilleure lecture et compréhension du code. L'**indentation est** synonyme de décalage. ...
L'une des particularités de **Python est** son utilisation de l' **indentation** pour *mettre en évidence les blocs de code.*
Pour utiliser une fonction , il faut l'appeler c'est-à-dire écrire son nom et remplacer les variables par des valeurs numériques dans la console.

Instruction conditionnelle

1.Les conditions dans un test (lienmini.fr/10557-10)

Une **condition** est une expression dont le résultat est soit « vrai » soit « faux ».
Une condition peut être construite à l'aide :

- d'opérateurs de comparaison :

Opérateur de comparaison (Python)	==	!=	> ou <	>= ou <=
Signification	égal	différent	supérieur (ou inférieur)	supérieur ou égal (ou inférieur ou égal)

- d'opérateurs logiques :

Opérateur logique (Python)	and	or	not
Signification	et	ou	non

- Une **instruction conditionnelle** est une instruction qui n'est exécutée que **si** une condition est réalisée. Autrement dit, **si** une condition est réalisée **alors** l'instruction est réalisée.
- La condition est suivie de **deux points.**
- Les instructions liées à la condition doivent être **indentées** (décalées vers la droite). On peut dire que c'est l'indentation qui remplace le mot « alors » qui n'existe pas en langage Python.

Mot-clé `if` pour Si

Condition à réaliser

```
1 if condition:
2     instruction1
3     instruction2
4     ...
```

Instructions Conditionnelles

Indentation

2-Structure conditionnelle « if …else »

Cette structure n'est utilisée que lorsqu'il y a seulement 2 conditions possibles

Exemple :

```
def valabs(x):
    if x<=0:
        print(-x)
    else:
        print(x)
```

Console Python

```
*** Python 3.8.8 (default, Apr 13 2021, 15:08:03) [MSC v.
64 bit (AMD64)] on win32. ***
*** Distant Python engine is active ***
>>>
*** Console de processus distant Réinitialisée ***
>>> valabs(5)
5
>>> valabs(-10)
10
```

3-Structure conditionnelle « if …elif…else »

Cette structure n'est utilisée que lorsqu'il y a plus de 2 conditions possibles.

Exemple : un élève de terminale qui passe le bac peut en fonction de sa note finale soit être refusé (note<8) soit passé l'oral de second groupe (8≤moyenne<10) soit avoir son examen (moyenne≥10)

La fonction python ci-dessous renvoie le résultat à l'examen en fonction de la moyenne de l'élève. Compléter cette fonction python et la tester sur l'ordinateur.

```
def resultat(x):
    if .......:
        print("l'élève est refusé)
    ............:
        print("l'élève passe l'oral de rattrapage")
    .........:
        print("l'élève a obtenu son bac")
```

BOUCLE BORNEE OU BOUCLE POUR Vidéo : lienmini.fr/10557-13

Les boucles permettent de répéter des instructions

Exemple en langage naturel:

Pour *Marche d'escalier* **allant de** *1* **à** *10*
Monter sur la marche suivante
Fin Pour

Pour *Variable* **allant de** *Valeur début* **à** *Valeur fin* *Instructions* **Fin Pour**

*On peut répéter les mêmes instructions pour un nombre de répétitions prédéfini par une variable appelée **compteur** .Cette boucle est dite **bornée**.*

Programmation en Python :

On utilise les mots clés : « for » (pour) « in range(…) » (dans la liste d'entiers) .
Les deux points « : » marquent le début du bloc d'instructions de la boucle for.
L'indentation (le décalage vers la droite) indique les instructions faisant partie de la boucle.
Il n'y a pas d'instructions de fin de boucle. On met fin à la boucle en « cassant l'indentation »

Python	Remarques
for k **in range**$(d, n+1)$: {instructions}	L'instruction **for** k **in range**$(d, n+1)$ fait parcourir à la variable k tous les entiers de d à n. Lorsque $d = 0$, on peut remplacer **range**$(d, n+1)$ par **range**$(n+1)$.

On ne tient pas compte de la dernière valeur de la liste range

```python
for i in range(5):
    print(i)
```

```
*** Distant Python engine is active ***
>>>
*** Console de processus distant Réinitialisée ***
0
1
2
3
4
>>>
```

```python
for i in range(1,5):
    print(i)
```

```
*** Console de processus distant Réinitialisée ***
1
2
3
4
```

Boucle non bornée ou boucle Tant que Vidéo : lienmini.fr/10557-16

- Dans un certain nombre de cas, il est indispensable de répéter des instructions sans savoir à l'avance combien de fois on les répète. La boucle for est alors inefficace. On utilise un autre type de boucle : **les boucles non bornées**. Les instructions sont alors répétées tant qu'une condition est vérifiée. On parle ainsi de **boucle tant que** ou de **boucle while**.
- La boucle s'arrête quand la condition n'est plus vérifiée.

Exemple en langage naturel:

Tant que *Le verre n'est pas plein*
Verser de l'eau
Fin Tant que

Tant que *Condition est vraie* *Instructions* **Fin Tant que**

On peut répéter les mêmes instructions tant qu'une condition reste vérifiée.

Programmation en Python :

```python
while condition:
    instruction1
    instruction2
```

Fichier Edition Rechercher Affich
Nouveau Fichier...

```python
i=0
while i<5 :
    print(i)
    i=i+1
```

```
*** Console de processus distant Réinitialisée ***
>>>
0
1
2
3
4
```

Tester ses connaissances :
lienmini.fr/10557-14 et lienmini.fr/10557-17

THEME 1 LES SUITES NUMERIQUES

Définition : Une suite u de nombres réels est une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}$ dont la variable est un entier naturel. L'image par u d'un entier naturel n est notée $u_n$et se lit « u indice n » ou « u de n ». u_n est le terme général de la suite u que l'on note aussi $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

La formule est explicite si on connait l'expression de u_n en fonction de n.
Exemple : $u_n = n^2 \quad u_0 = 0^2 = 0$, $u_3 = 3^2 = 9$

La formule est de récurrence si on connait l'expression de u_{n+1} en fonction de u_n. (plus généralement , la formule entre deux termes qui se suivent)

Exemple : $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = 4u_n - 6 \end{cases} \qquad u_1 = u_{0+1} = 4u_0 - 6 = 4 \times 3 - 6 = 6 \qquad u_2 = 4u_1 - 6 = 18$

Pour s'entrainer : mathssa.fr/suitegen (non interactif)

Méthode : calcul de termes à l'aide d'un algorithme : Pour tout entier n, on donne : $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = 4u_n - 6 \end{cases}$

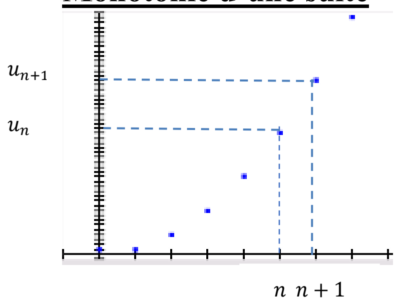
Écrire un programme Python permettant de calculer la liste des 11 premiers termes de la suite (u_n).

```
3 def liste(n):
4     u=3
5     L=[u]
6     for i in range(1,n+1):
7         u=4*u-6
8         L.append(u)
9     return(L)
```

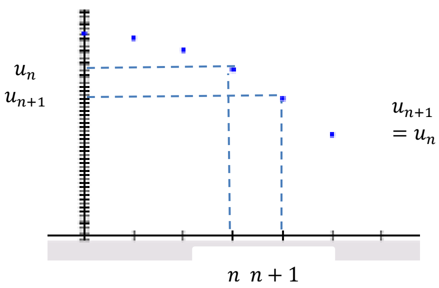
```
>>> liste(10)
[3, 6, 18, 66, 258, 1026, 4098, 16386, 65538, 262146, 1048578]
>>>
```

(on pourrait dans la ligne 8 écrire L=L+[u])

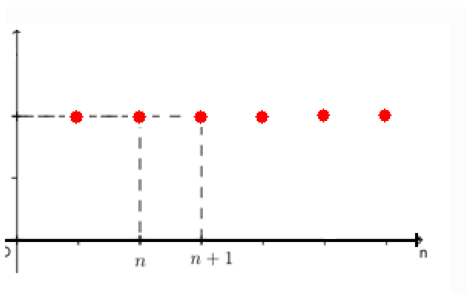
Monotonie d'une suite



Suite croissante



Suite décroissante

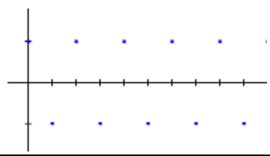


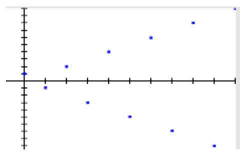
Suite constante

- La suite (u_n) est **croissante si** pour tout entier naturel n, $u_{n+1} \geq u_n$.
- La suite (u_n) est **décroissante** pour tout entier naturel n, $u_{n+1} \leq u_n$.
- La suite (u_n) est **constante** pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n$.

Remarques : Lorsqu'on a $u_{n+1} > u_n$, on dit que (u_n) est strictement croissante.
Lorsqu'on a $u_{n+1} < u_n$, on dit que (u_n) est strictement décroissante.

Il existe des suites ni croissante ni décroissante.
Exemples : $(-1)^n \quad et \quad n(-1)^n$





Propriété:

- Si , pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n \geq 0$ alors la suite (u_n) est croissante
- Si , pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n \leq 0$ alors la suite (u_n) est décroissante
- Si , pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n = 0$ alors la suite (u_n) est constante

Propriété: lorsqu'une suite (u_n) est définie par $u_n = f(n)$ avec f fonction
Si f croissante sur [0 ;+∞[alors la suite (u_n) est croissante
Si f décroissante sur [0 ;+∞[alors la suite (u_n) est décroissante

Exemple 1: Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = u_n - n^2$.Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.
Pour tout entier naturel n , $u_{n+1} - u_n = u_n - n^2 - u_n = -n^2$.
Or $n^2 \geq 0$. Ainsi pour tout entier naturel n , $u_{n+1} - u_n \leq 0$
La suite (u_n) est donc décroissante.

Exemple 2: Soit la suite (u_n) définie par $u_n = 3 - 4 \times 0{,}5^n$.Démontrer que la suite (u_n) est strictement croissante.
Pour tout entier naturel n ,

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= 3 - 4 \times 0{,}5^{n+1} - (3 - 4 \times 0{,}5^n) \\ &= 3 - 4 \times 0{,}5^{n+1} - 3 + 4 \times 0{,}5^n \\ &= -4 \times 0{,}5^n \times 0{,}5 + 4 \times 0{,}5^n \\ &= -2 \times 0{,}5^n + 4 \times 0{,}5^n \\ &= 2 \times 0{,}5^n . \end{aligned}$$

Or 2>0 et $0{,}5^n > 0$. Ainsi pour tout entier naturel n , $u_{n+1} - u_n > 0$
La suite (u_n) est donc strictement croissante.

SUITE ARITHMETIQUE

Définition : Une suite (u_n) est une **suite arithmétique** s'il existe un nombre r tel que pour tout entier n, on a : $u_{n+1} = u_n + r$ .Le nombre r est appelé **raison** de la suite.

Remarque : la monotonie dépend du signe de r.

Propriété :
Soit (u_n) est une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0.
Pour tout entier naturel n, on a : $u_n = u_0 + nr$
Soit (u_n) est une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_1.
Pour tout entier naturel *n non nul*, on a : $u_n = u_1 + (n-1)r$

Propriété :

- Soit n un entier naturel non nul alors on a : $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$
- soit (u_n) une suite arithmétique de raison r et de 1er terme u_0.

$$u_0 + u_1 + \cdots + u_n = (n+1) \times \frac{u_0 + u_n}{2} = nombre\ de\ termes \times \frac{premier\ terme + dernier\ terme}{2}$$

SUITE GEOMETRIQUE

Définition :
Une suite (u_n) est une **suite géométrique** s'il existe un nombre q tel que pour tout entier n, on a :
$u_{n+1} = q \times u_n$. Le nombre q est appelé **raison** de la suite.

Propriété :
Soit (u_n) est une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0.
Pour tout entier naturel n, on a : $u_n = u_0 \times q^n$
Soit (u_n) est une suite géométrique de raison q et de premier terme u_1.
Pour tout entier naturel *n non nul*, on a : $u_n = u_1 \times q^{n-1}$

Exemple : formule explicite d'une suite arithmético-géométrique vidéo : mathssa.fr/arithmetico.html
la suite (u_n) est définie par $u_0 = 4$ *et* pour tout n , $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2$.
Soit la suite(v_n) définie par $v_n = u_n - 3$. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique puis déterminer la formule explicite de la suite (u_n)

Correction :
Pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = u_{n+1} - 3 = \frac{1}{3}u_n + 2 - 3 = \frac{1}{3}u_n - 1 = \frac{1}{3}(u_n - 3) = \frac{1}{3}v_n$.
La suite (v_n) est donc géométrique de 1er terme $v_0 = u_0 - 3 = 4 - 3 = 1$, de raison q=$\frac{1}{3}$.
On en déduit que pour tout entier n, $v_n = v_0 \times q^n = 1 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n$
Ainsi $u_n - 3 = \left(\frac{1}{3}\right)^n$ *et* $u_n = 3 + \left(\frac{1}{3}\right)^n$

<u>Propriété :</u>

- Soit n un entier naturel non nul et q un réel différent de 1 alors on a :

$$1+q+q^2+q^3+\cdots+q^n=\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

- soit (u_n) une suite géométrique de raison $q\neq 1$ et de 1er terme u_0.

$$u_0+u_1+\cdots+u_n=\frac{u_0-u_{n+1}}{1-q}=\frac{premier\ terme-terme\ qui\ suit\ le\ dernier}{1-raison}$$

Pour s'entrainer : mathssa.fr/suitesomme et mathssa.fr/suitesomme2

<u>Méthode : calcul de somme à l'aide d'un algorithme :</u>

Écrire un programme Python permettant de calculer la somme des 10 premiers termes de la suite géométrique (u_n) de 1er terme $u_0=2$ et de raison q=1,5.

```
def somme(n):
    u=2
    S=u
    for i in range(1,n+1):
        u=1.5*u
        S=S+u
    return(S)
```

```
>>> somme(9)
226.66015625
>>>
```

<u>Suite majorée , minorée et bornée</u>

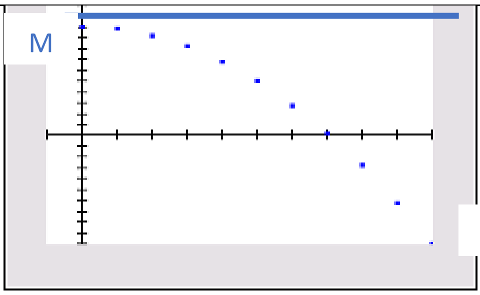


Fig1

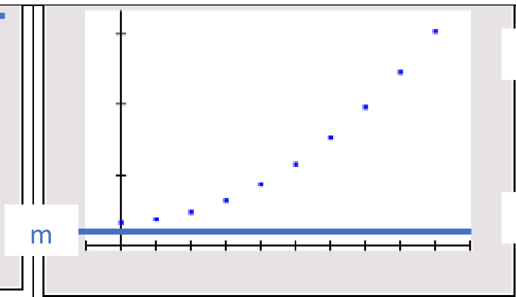


Fig2

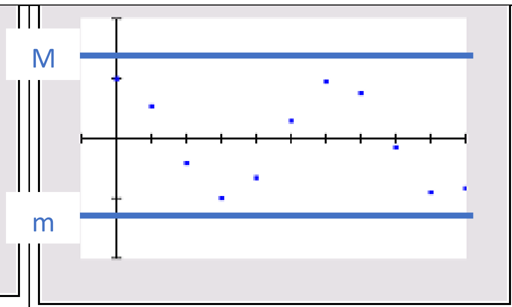


Fig3

<u>Définitions :</u>

- La suite (u_n) est **majorée** s'il existe un réel M tel que pour tout entier naturel n, on a : $u_n\leq M$. Fig1
- La suite (u_n) est **minorée** s'il existe un réel m tel que pour tout entier naturel n, on a :$u_n\geq m$. Fig2
- La suite (u_n) est **bornée** si elle est à la fois majorée et minorée. Fig3

<u>Remarque :</u> les réels m et M sont des **nombres indépendants** de l'entier n.
M est appelé **majorant** , m **minorant**

<u>Raisonnement par récurrence</u>

Soit P(n) une proposition qui dépend d'un entier naturel n.
Pour démontrer que pour tout entier naturel $n\geq n_0$, P(n) est vraie, il suffit de :

1ère étape : vérifier que *P*(n_0) est vraie **(initialisation)**

2ème étape : démontrer que pour un entier $k\geq n_0$ quelconque
si *P(k)* est vraie alors *P(k+1)* est vraie **(hérédité)**

(on aura très souvent n_0 = 0 ou 1)

<u>Propriété :</u> Inégalité de Bernoulli vidéo : mathssa.fr/bernoulli
Soit un nombre réel a positif.
Pour tout entier naturel n, on a : $(1+a)^n\geq 1+na$.

Exemples de raisonnement par récurrence : soit (u_n) définie par $u_0 = 2$ *et pour* tout n , $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2$

Démontrons par récurrence que la suite (u_n) est majorée par 3. Soit P(n) la proposition « $u_n \leq 3$ » **<u>1ère étape :initialisation</u>** vérifions que $P(0)$ est vraie $u_0 = 2$ et $2 \leq 3$ $P(0)$ est donc vraie **<u>2ème étape : hérédité</u>** Hypothèse : on suppose que pour un entier k quelconque *P(k)* est vraie c'est-à-dire $u_k \leq 3$. But : démontrons alors que *P(k+1)* est vraie c'est-à-dire $u_{k+1} \leq 3$ $u_k \leq 3$ $\frac{1}{3}u_k \leq 1$ $\frac{1}{3}u_k + 2 \leq 3$ $u_{k+1} \leq 3$ Conclusion : la propriété est vraie au rang 0 et est héréditaire. En vertu du principe de récurrence, elle est donc vraie pour tout entier naturel n.	*Démontrons par récurrence que la suite (u_n) est croissante.* Soit P(n) la proposition « $u_{n+1} \geq u_n$ » **<u>1ère étape :initialisation</u>** vérifions que $P(0)$ est vraie $u_0 = 2$ et $u_1 = \frac{1}{3}u_0 + 2 = \frac{8}{3}$ $u_1 \geq u_0$ $P(0)$ est donc vraie **<u>2ème étape : hérédité</u>** Hypothèse : on suppose que pour un entier k quelconque *P(k)* est vraie c'est-à-dire $u_{k+1} \geq u_k$. But : démontrons alors que *P(k+1)* est vraie c'est-à-dire $u_{k+2} \geq u_{k+1}$ $u_{k+1} \geq u_k$ $\frac{1}{3}u_{k+1} \geq \frac{1}{3}u_k$ $\frac{1}{3}u_{k+1} + 2 \geq \frac{1}{3}u_k + 2$ $u_{k+2} \geq u_{k+1}$ Conclusion : la propriété est vraie au rang 0 et est héréditaire. En vertu du principe de récurrence, elle est donc vraie pour tout entier naturel n.	*Démontrons* par récurrence que pour tout n, $u_n = 3 - \left(\frac{1}{3}\right)^n$ **<u>1ère étape :initialisation</u>** vérifions que $P(0)$ est vraie $u_0 = 2$ et $3 - \left(\frac{1}{3}\right)^0 = 3 - 1 = 2$ $u_0 = 3 - \left(\frac{1}{3}\right)^0$ $P(0)$ est donc vraie **<u>2ème étape : hérédité</u>** Hypothèse : on suppose que pour un entier k quelconque *P(k)* est vraie c'est-à-dire $u_k = 3 - \left(\frac{1}{3}\right)^k$ But : démontrons alors que *P(k+1)* est vraie c'est-à-dire $u_{k+1} = 3 - \left(\frac{1}{3}\right)^{k+1}$ $u_{k+1} = \frac{1}{3}u_k + 2$ $= \frac{1}{3}(3 - \left(\frac{1}{3}\right)^k) + 2$ $= \frac{3}{3} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^k + 2$ $= 3 - \left(\frac{1}{3}\right)^{k+1}$ Conclusion : la propriété est vraie au rang 0 et est héréditaire. En vertu du principe de récurrence, elle est donc vraie pour tout entier naturel n.

Limites de suite

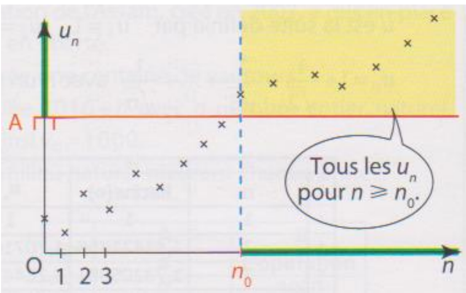


Fig1

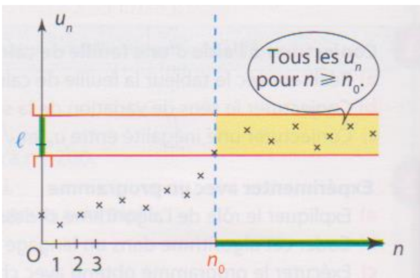


Fig2

<u>Définitions : en pratique sert peu…</u>

- La suite u a pour limite $+\infty$ si et seulement si **tout intervalle ouvert de la forme** $]A;+\infty[$ contient tous les termes de la suite u à partir d'un certain rang. (fig1)
- La suite u a pour limite - ∞ si et seulement si **tout intervalle ouvert de la forme** $]-\infty;A[$ contient tous les termes de la suite u à partir d'un certain rang. **<u>Notation :</u>**on notera $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ ou $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$
- La suite u a pour limite le réel ℓ si et seulement si **tout intervalle ouvert contenant** ℓ * contient tous les termes de la suite u à partir d'un certain rang. (fig2) (*de la forme]m ;M[avec m < ℓ < M)

<u>Notation :</u> $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$. On dira aussi que la suite u converge vers ℓ.

<u>Remarques</u> : une suite **non convergente** est dite **divergente.**
Si une suite u admet une limite alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.
Exemples : $(-1)^n$ *et* $n(-1)^n$ sont divergentes , 3^n diverge vers $+\infty$

Propriétés :limites de référence

- $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$; $\lim\limits_{n\to+\infty} n^3 =+\infty$; $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} =+\infty$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} =0$; $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} =0$; $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^3} =0$; $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} =0$
-

q	$q \leq -1$	$-1 < q < 1$	$q = 1$	$q > 1$
$\lim\limits_{n\to\infty} q^n$	Pas de limite	0	1	$+\infty$

Exemple : Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{-3n}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} e^{-3n} = \lim\limits_{n\to+\infty} (e^{-3})^n$. Comme $-1 < e^{-3} < 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} (e^{-3})^n = 0$.

Algorithme de seuil : voir aussi p43

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et pour tout entier n, $u_{n+1} = 4u_n$. Cette suite est croissante et admet pour limite $+\infty$.
Ecrire un programme permettant de déterminer le rang à partir duquel la suite est supérieure à un nombre réel A

Pour comprendre : état des variables

Toi tu sors !

n	**0**	**1**	**2**	**…**	**…**	**???**
u	**2**	**8**	**32**	**…**	**<A**	**≥A**

```
def  seuil(A)
    n = 0
    u = 2
    while u < A :
        n = n + 1
        u = 4*u
    return(n)
```

SOMME

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n =$	L	L	L	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n =$	L'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n + v_n =$	$L + L'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F.I.*

* Forme indéterminée : On ne peut pas prévoir la limite éventuelle.

PRODUIT ∞ désigne $+\infty$ ou $-\infty$

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n =$	L	L	∞	0
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n =$	L'	∞	∞	∞
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n v_n =$	$L\,L'$	∞	∞	F.I.

On applique la règle des signes pour déterminer si le produit est $+\infty$ ou $-\infty$.

QUOTIENT ∞ désigne $+\infty$ ou $-\infty$

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n =$	L	$L \neq 0$	L	∞	∞	0
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n =$	$L' \neq 0$	0	∞	L	∞	0
$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} =$	$\frac{L}{L'}$	∞	0	∞	F.I.	F.I.

On applique la règle des signes pour déterminer si le quotient est $+\infty$ ou $-\infty$.

Les quatre **formes indéterminées** à reconnaître sont :"$\infty - \infty$", "$0 \times \infty$", "$\frac{\infty}{\infty}$" et "$\frac{0}{0}$".

Exemple :lever une indétermination par factorisation… $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 - 5n + 1 = ?$

- $\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty \\ \lim\limits_{n\to+\infty} -5n+1 = -\infty \end{cases}$. Il s'agit d'une forme indéterminée du type "$\infty - \infty$".

- Levons l'indétermination en factorisant par le monôme de plus haut degré :

$n^2 - 5n + 1 = n^2\left(1 - \frac{5n}{n^2} + \frac{1}{n^2}\right) = n^2\left(1 - \frac{5}{n} + \frac{1}{n^2}\right)$

- $\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{5}{n} = 0 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^2} = 0 \end{cases}$. Donc, comme limite d'une somme : $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 - \dfrac{5}{n} + \dfrac{1}{n^2} = 1$

- $\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty \\ \lim\limits_{n\to+\infty} 1 - \dfrac{5}{n} + \dfrac{1}{n^2} = 1 \end{cases}$.Donc, comme limite d'un produit : $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2\left(1 - \dfrac{5}{n} + \dfrac{1}{n^2}\right) = +\infty$

Soit : $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 - 5n + 1 = +\infty$.

Théorème du point fixe :

Soit une fonction f continue sur un intervalle I et soit une suite (u_n) telle que pour tout n, $u_n \in I$ et $u_{n+1} = f(u_n)$. Si (u_n) converge vers L alors $f(L) = L$.

Méthode de l'escalier

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 8$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0{,}85u_n + 1{,}8$.

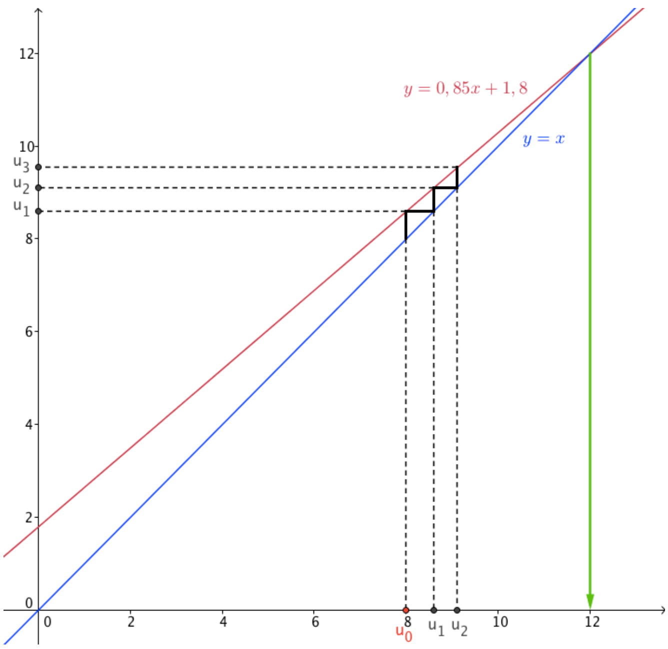
1) Dans un repère orthonormé, on considère la fonction f définie par
$f(x) = 0{,}85x + 1{,}8$.

a) Tracer les droites d'équations respectives $y = 0{,}85x + 1{,}8$ et $y = x$.

b) Dans ce repère, placer u_0 sur l'axe des abscisses, puis en utilisant les droites précédemment tracées, construire sur le même axe u_1, u_2 et u_3. On laissera apparent les traits de construction.

c) À l'aide du graphique, conjecturer la limite de la suite (u_n).

2) En supposant que la suite (u_n) est convergente, démontrer le résultat conjecturé dans la question 1.c.



Correction

1) a) b) - On place le premier terme u_0 sur l'axe des abscisses.
On trace l'image de
u_0 par f pour obtenir sur l'axe des ordonnées $u_1 = f(u_0)$.
- On reporte u_1 sur l'axe des abscisses à l'aide de la droite d'équation $y = x$.
- On fait de même pour obtenir u_2 puis u_3…

c) En continuant le tracé en escalier, celui-ci se rapprocherait de plus en plus de l'intersection des deux droites. On conjecture que la limite de la suite (u_n) est 12.

2) La suite (u_n) converge et la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ et $u_{n+1} = f(u_n)$
Si L est la limite de la suite (u_n) alors d'après le théorème du point fixe : L est solution de l'équation $f(L) = L$.
Soit : $0{,}85L + 1{,}8 = L$ soit $L - 0{,}85L = 1{,}8$ et $0{,}15L = 1{,}8$
$L = 1{,}8 : 0{,}15 = 12$.La suite (u_n) converge vers 12.

Théorèmes de comparaison

Théorème 1 :
Soit deux suites (u_n) et (v_n).

Si, à partir d'un certain rang, on a $\begin{cases} u_n \leq v_n \\ \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty \end{cases}$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.

Théorème 2 :
Soit deux suites (u_n) et (v_n).

Si, à partir d'un certain rang, on a : $\begin{cases} u_n \geq v_n \\ \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty \end{cases}$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$.

Théorèmes des gendarmes

Soit trois suites (u_n), (v_n) et (w_n).

Si, à partir d'un certain rang, on a : $\begin{cases} u_n \leq v_n \leq w_n \\ \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = L \\ \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = L \end{cases}$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = L$.

Remarque : le théorème des gendarmes ne s'applique que pour des limites finies !!!

Exemples :1.Déterminer: $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 + (-1)^n$ Pour tout entier n, $(-1)^n \geq -1$ donc : $n^2 + (-1)^n \geq n^2 - 1$ Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 - 1 = +\infty$, donc d'après les théorèmes de comparaison, $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 + (-1)^n = +\infty$.	2.Déterminer : $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 + \frac{\sin(n)}{n}$ pour tout entier $n\geq1$, $-1 \leq \sin(n) \leq 1$, donc : $-\frac{1}{n} \leq \frac{\sin(n)}{n} \leq \frac{1}{n}$ Or : $\lim\limits_{n\to+\infty} -\frac{1}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ donc d'après le théorème des gendarmes : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\sin(n)}{n} = 0$ Et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 + \frac{\sin(n)}{n} = 1$.

Convergence des suites monotones

Propriété : Si une suite est croissante et admet pour limite L, alors elle est majorée par L.

Théorème de convergence monotone :
- Si une suite est croissante et majorée alors elle est convergente.
- Si une suite est décroissante et minorée alors elle est convergente.

Corollaire :
1) Si une suite est croissante et non majorée alors elle tend vers $+\infty$.
2) Si une suite est décroissante et non minorée alors elle tend vers $-\infty$.

THEME 2 DERIVATION RAPPELS ET COMPLEMENTS

Nombre dérivé vidéo : mathssa.fr/derive (de 0 à 12mns36s)

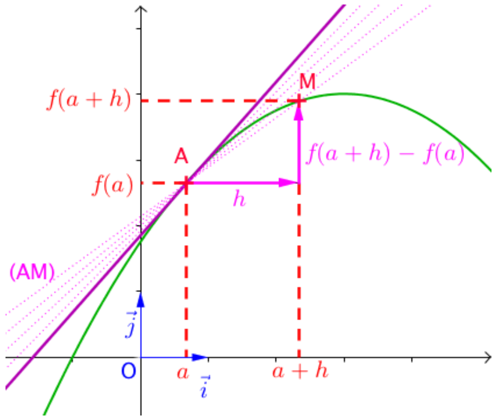
Idée générale

Soit A un point fixe d'une courbe d'abscisse a et M un point variable d'abscisse $a+h$.
Lorsque M se rapproche de A, la sécante (AM) se rapproche d'une droite fixe que l'on appelle tangente.
Le coefficient directeur de la sécante (AM) se rapprochera ainsi d'une valeur L correspondant au coefficient directeur de la tangente . Ce nombre s'appelle aussi nombre dérivé de f en a noté $f'(a)$.

Définition :

Si le taux de variations de f entre a et $a+h$: $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ se rapproche d'un nombre L lorsque h se rapproche de 0 alors on dira que f est dérivable en a et L est appelé nombre dérivé de f en a et est noté $f'(a)$.

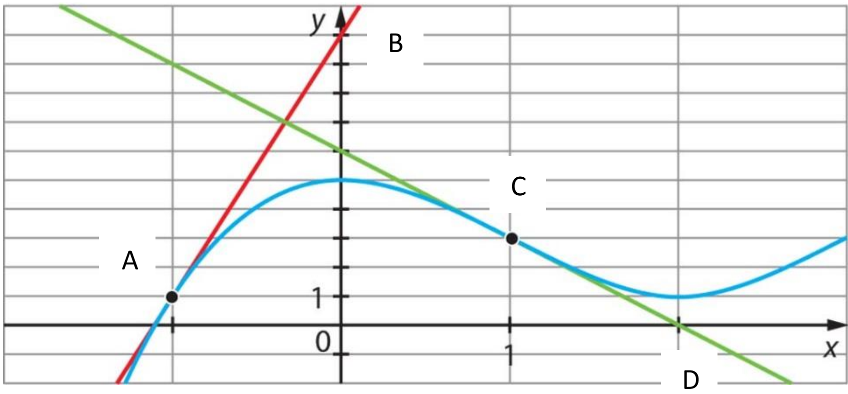
On écrira : $f'(a) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$



Equation d'une tangente

$f'(a)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe C au point d'abscisse a

Exemple : f est une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Sa courbe représentative C_f ainsi que les tangentes à C_f aux points d'abscisses – 1 et 1 sont tracées ci-dessous. Déterminer en justifiant $f'(-1)$ et $f'(1)$.



$f'(-1)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe C au point d'abscisse -1.

$f'(-1) = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{10-1}{0-(-1)} = 9$

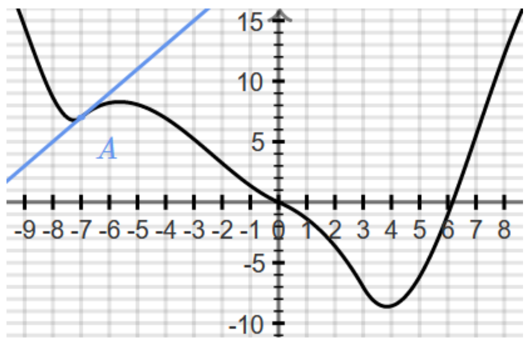
$f'(1)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe C au point d'abscisse 1.

$f'(1) = \frac{y_D - y_C}{x_D - x_C} = \frac{0-3}{2-1} = -3$

Propriété : Une équation de la tangente à la courbe C_f en A est : $y = f'(a)(x-a) + f(a)$

Entrainement : mathssa.fr/nombrederive et mathssa.fr/equtangente

Application : déterminer l'équation de la tangente à la courbe ci-dessous au point d'abscisse -7.



Une équation de la tangente au point d'abscisse a est $y = f'(a)(x-a) + f(a)$

$a = -7$, $f(a) = 7$, $f'(a) = 2$

$y = 2(x-(-7)) + 2 = 2x + 14 + 2 = 2x + 16$

Dérivées usuelles

Traité ?	Fonction f	Ensemble de définition de f	Dérivée f'	Ensemble de définition de f'
	$f(x) = a, a \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 0$	$\mathbb{R}$
	$f(x) = x, a \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 1$	$\mathbb{R}$
	$f(x) = x^2$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 2x$	$\mathbb{R}$
	$f(x) = x^n$	$\mathbb{R}$ ($n \geq 1$ entier)*	$f'(x) = nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
	$f(x) = \frac{1}{x}$	$\mathbb{R}\backslash\{0\}$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}\backslash\{0\}$
	$f(x) = x^n$	$\mathbb{R}\backslash\{0\}$ ($n \leq -1$ entier)*	$f'(x) = nx^{n-1}$	$\mathbb{R}\backslash\{0\}$
	$f(x) = \sqrt{x}$	$[0\,;\,+\infty[$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0\,;\,+\infty[$
	$f(x) = e^x$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = e^x$	$\mathbb{R}$
	$f(x) = e^{ax+b}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = ae^{ax+b}$	$\mathbb{R}$
	$f(x) = \ln(x)$	$]0\,;\,+\infty[$	$f'(x) = \frac{1}{x}$	$]0\,;\,+\infty[$
	$f(x) = \cos(x)$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = -\sin(x)$	$\mathbb{R}$
	$f(x) = \sin(x)$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = \cos(x)$	$\mathbb{R}$

*De façon plus générale, lorsque n est un entier relatif, $si\ f(x) = x^n$ alors $f'(x) = nx^{n-1}$

Opérations et dérivation : u et v sont **dérivables** sur I

Traité ?	Fonction f	Dérivée f'	condition
	$u + v$	$u' + v'$	
	ku	ku'	
	uv	$u'v + uv'$	
	u^2	$2u'u$	
	$\frac{1}{v}$	$-\frac{v'}{v^2}$	pour tout $x \in$ I, $v(x) \neq 0$
	$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v - uv'}{v^2}$	pour tout $x \in$ I, $v(x) \neq 0$

Exemple 1:dérivée d'une fonction polynome **Vidéo :mathssa.fr/derivepolynome.html (3mns)**

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^3 - 4x^2 + 5x + 12$ .Calculer $f'(x)$.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que **fonction polynome.**
Pour tout réel x, $f'(x) = 3 \times 3x^2 - 4 \times 2x + 5 \times 1 + 0 = 9x^2 - 8x + 5.$

Exemple 2: soit f la fonction définie sur $\left]\frac{4}{3}; +\infty\right[$ par $f(x) = \frac{1-x^2}{3x-4}$. Déterminer $f'(x)$.

f est **dérivable** sur $\left]\frac{4}{3}; +\infty\right[$ car de la forme $\frac{u}{v}$ où $u\ et\ v$ sont dérivables $\mathbb{R}$ $(v(x) \neq 0\ sur\left]\frac{4}{3}; +\infty\right[\ )$

Pour tout réel $x > \frac{4}{3}$,

- $f = \frac{u}{v}$
- $u(x) = 1 - x^2 \qquad v(x) = 3x - 4$
  $u'(x) = -2x \qquad v'(x) = 3$
- $f' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \qquad f'(x) = \frac{-2x(3x-4)-(1-x^2)3}{(3x-4)^2} = \frac{-6x^2+8x-3+3x^2}{(3x-4)^2} = \frac{-3x^2+8x-3}{(3x-4)^2}$

Pour s'entrainer mathssa.fr/deriveu+v et matssa.fr/deriveformules

Composition et dérivation:

Définition :

On appelle **fonction composée** des fonctions u par v la fonction notée $v \circ u$ définie par : $v \circ u\ (x) = v(u(x))$

Traité ?	Fonction f	Dérivée f'	condition
	$g(ax+b)$	$ag'(ax+b)$	
	$v \circ u$ ou $v(u(x))$	$v' \circ u \times u'$ ou $v'(u(x)) \times u'(x)$	
	u^n avec $n \in \mathbb{Z}^*$	$nu'u^{n-1}$	Si $n \leq -1$, $u(x) \neq 0$
	$\sqrt{u}$	$\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$	Pour tout $x, u(x) > 0$
	e^u	$u'e^u$	
	$\ln(u)$	$\dfrac{u'}{u}$	Pour tout $x, u(x) > 0$
	$\cos(u)$	$-u'\sin(u)$	
	$sin(u)$	$u'cos(u)$	

Exemple : déterminer la dérivée de la fonctions définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^{2x^2-3x+1}$

f est **dérivable** sur $\mathbb{R}$car de la forme e^u où u est dérivable sur $\mathbb{R}$

- $f = e^u$
- $u(x) = 2x^2 - 3x + 1 \qquad u'(x) = 4x - 3$
- $f' = u'e^u \qquad f'(x) = (4x-3)e^{2x^2-3x+1}$

Théorème (monotonie):

Soit f une fonction **dérivable** sur un intervalle I

Si pour tout réel x de I, $f'(x) \geq 0$ alors f est **croissante** sur I.

Si pour tout réel x de I , $f'(x) \leq 0$ alors f est **décroissante** sur I.

Si pour tout réel x de I, $f'(x) = 0$ alors f est **constante** sur I.

Remarque :

Si $f'(x) > 0$ alors f est **strictement croissante** sur I.

Si $f'(x) < 0$ alors f est **strictement décroissante** sur I

Si $f'(x) > 0$ sauf en quelques valeurs isolées où elle s'annule alors f est **strictement croissante** sur I.

Si $f'(x) < 0$ sauf en quelques valeurs isolées où elle s'annule alors f est **strictement décroissante** sur I

Pour s'entrainer : mathssa.fr/variationsdeg3

Définition : Soit une fonction $f$dérivable sur un intervalle I dont la dérivée f' est dérivable sur I.
On appelle **fonction dérivée seconde** de f sur I la dérivée de f' que l'on note : f''.

Exemple : Calculer la dérivée seconde de chacune des fonctions f et g définies par :

$f(x) = 3x^3 - 5x^2 + 1$, $g(x) = e^{-2x}$

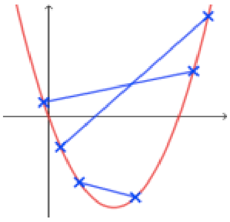
Correction

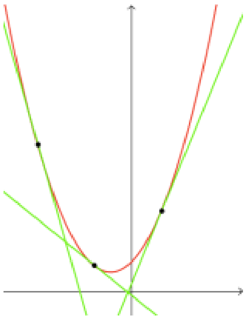
$f'(x) = 9x^2 - 10x$ $f''(x) = 18x - 10$	$g'(x) = -2e^{-2x}$ $g''(x) = -2 \times -2e^{-2x} = 4e^{-2x}$

Convexité :

- **Fonction convexe**

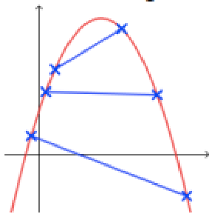
- Courbe entièrement située en dessous de ses cordes.
- Courbe entièrement située au-dessus de ses tangentes.
- f' croissante.
- $f''(x) \geq 0.$

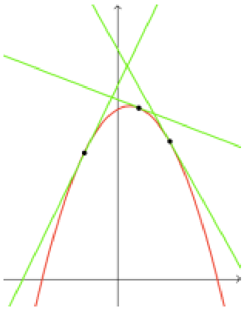




- **Fonction concave**

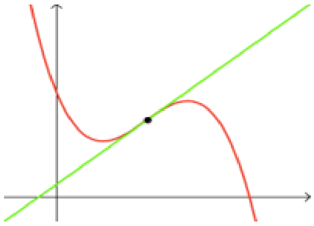
- Courbe entièrement située au-dessus de ses cordes.
- Courbe entièrement située en dessous de ses tangentes.
- f' décroissante.
- $f''(x) \leq 0.$





- **Point d'inflexion**

— Point où la courbe traverse sa tangente.
— Au point d'inflexion, la fonction change de convexité.
— f'' s'annule et change de signe



Exemple :Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 2x^2$.
Étudier la convexité de la fonction f.
Pour tout x, $f'(x) = 3x^2 - 4x$.
$f''(x) = 6x - 4$
$6x - 4 = 0$ si $6x = 4$
si $x = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

x	$-\infty$		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
Signe de f''(x)		-	0	+	
Variations de f'(x)					

Donc f est concave sur $\left]-\infty\,; \frac{2}{3}\right]$ et f est convexe sur $\left[\frac{2}{3}\,;\ +\infty\right[$.
f admet également un point d'inflexion au point d'abscisse $\frac{2}{3}$ car en cette valeur f'' s'annule et change de signe.

THEME 3 LIMITES ET CONTINUITE D'UNE FONCTION

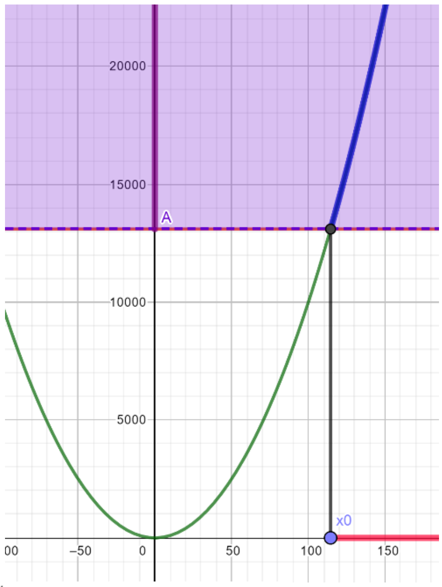
Vidéo : mathssa.fr/limites et mathssa.fr/limites2

Définitions (limites en + ou -∞)

La fonction f admet pour limite $+\infty$ en $+\infty$ si et seulement si **tout intervalle ouvert de la forme** $]A;+\infty[$ contient tous les réels $f(x)$ dès que x est **suffisamment grand** .

On note :

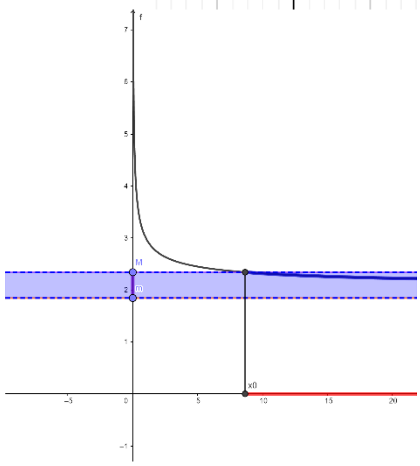
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$



Remarque : pour une limite égale à $-\infty$, on remplace $]A;+\infty[$ par $]-\infty;A[$.
Pour une limite en – infini , on remplace x est suffisamment grand par x est suffisamment petit

La fonction f admet pour limite ℓ en $+\infty$ si et seulement si tout intervalle ouvert contenant ℓ du type]m ;M[contient tous les réels $f(x)$ dès que x est **suffisamment grand.** On note :

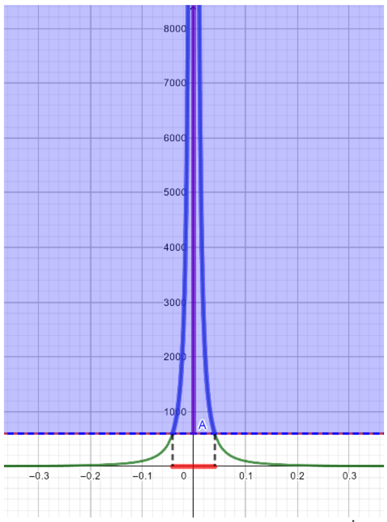
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell$$



Définitions (limite en un réel a)

La fonction f a pour limite $+\infty$ en a si et seulement si **tout intervalle ouvert de la forme** $]A;+\infty[$ contient tous les réels $f(x)$ dès que x est **suffisamment proche de a** .

On notera $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty.$

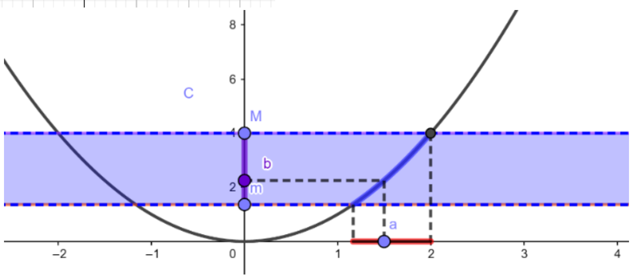


Remarque : Il arrive souvent qu'on soit amené à définir des limites *« d'un seul côté de a »* .

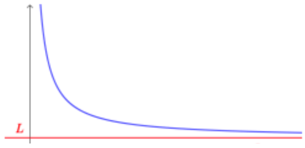
Naturellement, on introduit les notions de **limite à droite en a** et de **limite à gauche en a**

La fonction f a pour limite ℓ en a si et seulement si **tout intervalle ouvert contenant ℓ du type]m ;M[** contient tous les réels $f(x)$ dès que x est **suffisamment proche de a** .

On notera $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$

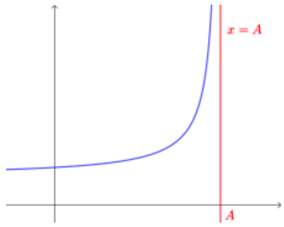


Définition d’une asymptote horizontale



- La droite d'équation $y = \ell$ est asymptote horizontale à la courbe représentative de la fonction f en $+\infty$ si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$
- La droite d'équation $y = \ell$ est asymptote horizontale à la courbe représentative de la fonction f en $-\infty$ si $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \ell$

Définition d’une asymptote verticale

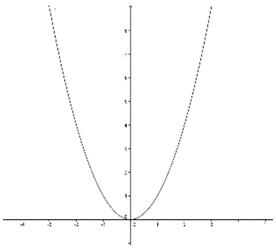


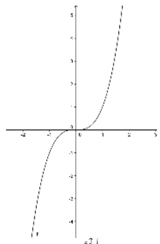
La droite d'équation $x = a$ est asymptote verticale à la courbe représentative de la fonction f si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \pm\infty$

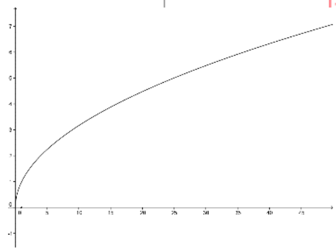
Remarque : cela fonctionne aussi pour les limites à droite ou à gauche

Propriétés :limites de référence (sans exp et ln)

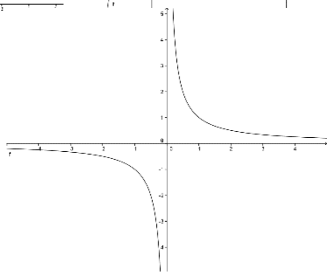
- $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$







- $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$, $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$
- $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \frac{1}{x} = -\infty$; $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x} = +\infty$;



L’axe des abscisses est une **asymptote horizontale** à la courbe de la fonction inverse en l’infini
L’axe des ordonnées **est une asymptote verticale** à la courbe de la fonction inverse.

Opérations sur les limites

α peut désigner $+\infty$, $-\infty$ ou un nombre réel. * Forme indéterminée : On ne peut pas prévoir la limite éventuelle.

SOMME

$\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) =$	L	L	L	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{x \to \alpha} g(x) =$	L'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) + g(x) =$	$L + L'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F.I.*

PRODUIT ∞ désigne $+\infty$ ou $-\infty$

$\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) =$	L	L	∞	0
$\lim\limits_{x \to \alpha} g(x) =$	L'	∞	∞	∞
$\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) \times g(x) =$	$L \times L'$	∞	∞	F.I.

On applique la règle des signes pour déterminer si le produit est $+\infty$ ou $-\infty$.

QUOTIENT ∞ désigne $+\infty$ ou $-\infty$

$\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) =$	L	$L \neq 0$	L	∞	∞	0
$\lim\limits_{x \to \alpha} g(x) =$	$L' \neq 0$	0	∞	L	∞	0
$\lim\limits_{x \to \alpha} \frac{f(x)}{g(x)} =$	$\frac{L}{L'}$	∞	0	∞	F.I.	F.I.

On applique la règle des signes pour déterminer si le quotient est $+\infty$ ou $-\infty$.

Les quatre **formes indéterminées** sont, par abus d'écriture :

$\infty - \infty$ $0 \times \infty$ $\frac{\infty}{\infty}$ $\frac{0}{0}$

Exemple: Lever une forme indéterminée à l'aide de la factorisation ou de la quantité conjuguée
Vidéo : **mathssa.fr/indeterm** , **mathssa.fr/quantconj** **mathssa.fr/quantconj2**

Déterminer : a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x^2-5x+1}{6x^2-5}$ b) $\lim\limits_{x\to 5} \frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}$

Correction

a) • On a une forme indéterminée du type "$\frac{\infty}{\infty}$".

• Levons l'indétermination en factorisant par les monômes de plus haut degré :

$$\frac{2x^2-5x+1}{6x^2-5} = \frac{x^2}{x^2} \times \frac{2-\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}}{6-\frac{5}{x^2}} = \frac{2-\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}}{6-\frac{5}{x^2}}$$

• $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{5}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{5}{x^2} = 0.$

Donc, comme limite de sommes : $\lim\limits_{x\to+\infty} 2-\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2} = 2$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} 6-\frac{5}{x^2} = 6$

• Donc, comme limite d'un quotient : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2-\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}}{6-\frac{5}{x^2}} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

Soit : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x^2-5x+1}{6x^2-5} = \frac{1}{3}$.

b)• $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 5} \sqrt{x-1}-2 = \sqrt{5-1}-2 = 0 \\ \lim\limits_{x\to 5} x-5 = 5-5 = 0 \end{cases}$ .Il s'agit d'une forme indéterminée du type "$\frac{0}{0}$".

• Levons l'indétermination à l'aide de l'expression conjuguée :

$$\frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5} = \frac{(\sqrt{x-1}-2)(\sqrt{x-1}+2)}{(x-5)(\sqrt{x-1}+2)} = \frac{x-1-4}{(x-5)(\sqrt{x-1}+2)} = \frac{x-5}{(x-5)(\sqrt{x-1}+2)} = \frac{1}{\sqrt{x-1}+2}$$

• $\lim\limits_{x\to 5} \sqrt{x-1}+2 = \sqrt{5-1}+2 = 4$.Donc, comme limite d'un quotient, on a : $\lim\limits_{x\to 5} \frac{1}{\sqrt{x-1}+2} = \frac{1}{4}$.

Soit : $\lim\limits_{x\to 5} \frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5} = \frac{1}{4}$.

Limites d'une fonction composée

Vidéo :mathssa.fr/limitecomposee

Soit u et v deux fonctions. La fonction composée $v \circ u$ est la fonction qui à x associe $v(u(x))$.

On notera sous forme schématique :

$$\begin{array}{ccccc} x & \xrightarrow{u} & u(x) & & \\ & & X & \xrightarrow{v} & v(X) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ a & & b & & c \end{array}$$

Propriété (admise) :

Soit a , b et c désignent soit des réels , soit $+\infty$, soit $-\infty$.

Soit u et v deux fonctions.

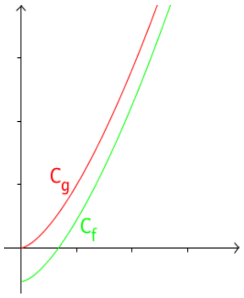
Si $\lim\limits_{x\to a} u(x) = b$ et $\lim\limits_{X\to b} v(X) = c$ alors $\lim\limits_{x\to a} (v \circ u)(x) = c$.

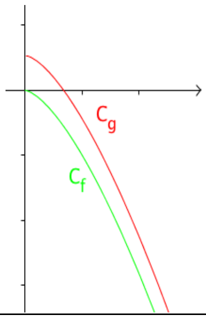
Exemple : déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{1-\frac{1}{x}}$ .On peut décomposer la fonction de la manière suivante :

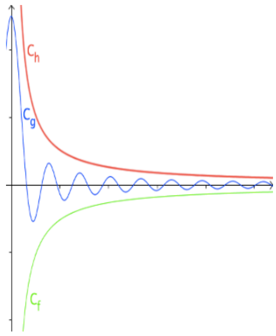
$$\begin{array}{ccccc} x & \longrightarrow & 1-\frac{1}{x} & & \\ & & X & \longrightarrow & e^X \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ -\infty & & 1 & & e^1 \end{array}$$

On a $\lim\limits_{x\to-\infty} 1-\frac{1}{x} = 1$ et $\lim\limits_{X\to 1} e^X = e^1$. Alors comme limite de fonction composée $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{1-\frac{1}{x}} = e$

Théorèmes de comparaison et des gendarmes







Théorème 1 :
Soit f et g trois fonctions définies sur un intervalle $I =]a\,;\,+\infty[$.
Si pour tout x de I, on a : $\begin{cases} f(x) \leq g(x) \\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \end{cases}$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$

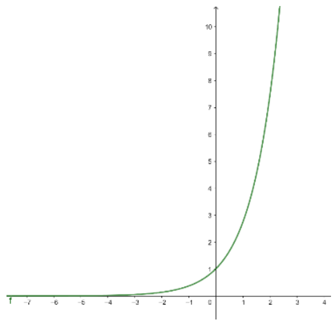
Théorème 2 :
Soit f et g trois fonctions définies sur un intervalle $I =]a\,;\,+\infty[$.
Si pour tout x de I, on a $\begin{cases} f(x) \leq g(x) \\ \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty \end{cases}$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

Théorème des gendarmes :
Soit f, g et h trois fonctions définies sur un intervalle $I =]a\,;\,+\infty[$.
Si pour tout x de I, on a : $\begin{cases} f(x) \leq g(x) \leq h(x) \\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L \\ \lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = L \end{cases}$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = L$.

Remarques : On obtient des théorèmes analogues en $-\infty$.Le théorème des gendarmes ne s'applique que pour des limites finies !!!

Exemple :déterminer : $\lim\limits_{x\to+\infty} x + \cos(x)$
pour tout réel x, $-1 \leq \cos(x) \leq 1$, donc : $x - 1 \leq x + \cos(x) \leq x + 1$
$x - 1 \leq x + \cos(x)$
Or : $\lim\limits_{x\to+\infty} x - 1 = +\infty$ donc d'après les théorèmes de comparaison : $\lim\limits_{x\to+\infty} x + \cos(x) = +\infty$

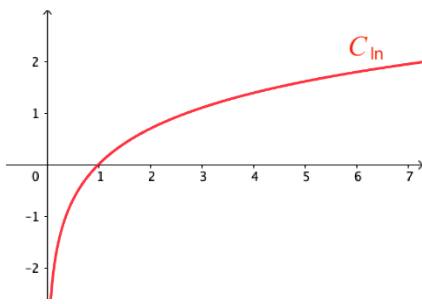
Toutes les limites liées à l'exponentielle (croissance comparée)



Propriétés : $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$

Propriétés (croissances comparées) :
a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$ et pour tout entier n, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty$
b) $\lim\limits_{x\to-\infty} x\,e^x = 0$ et pour tout entier n, $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n\,e^x = 0$

Toutes les limites liées au logarithme népérien (croissance comparée)



Propriétés : $\lim\limits_{x\to0} \ln(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$

Propriétés (croissances comparées) :
a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$ et pour tout entier naturel non nul n, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x^n} = 0$
b) $\lim\limits_{x\to0} x\ln(x) = 0$ et pour tout entier naturel non nul n, $\lim\limits_{x\to0} x^n\ln(x) = 0$

Exemple :déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x - x^2$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x - \ln(x)$

Il s'agit d'une forme indéterminée de type " ¥ - ¥ ".
Levons l'indétermination :
$e^x - x^2 = x^2\left(\dfrac{e^x}{x^2} - 1\right)$
Par croissance comparée : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^2} = +\infty$, Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^2} - 1 = +\infty$.
Or $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$
Et donc, comme limite d'un produit :
$\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\left(\dfrac{e^x}{x^2} - 1\right) = +\infty$ Soit : $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x - x^2 = +\infty$.

b) Il s'agit d'une forme indéterminée de type " ¥ - ¥ ".
Levons l'indétermination :
$x - \ln(x) = x\left(1 - \dfrac{\ln(x)}{x}\right)$
Par croissance comparée : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$, Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} 1 - \dfrac{\ln(x)}{x} = 1$.
Or $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$
Et donc, comme limite d'un produit : $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(1 - \dfrac{\ln(x)}{x}\right) = +\infty$ Soit :
$\lim\limits_{x\to+\infty} x - \ln(x) = +\infty$.

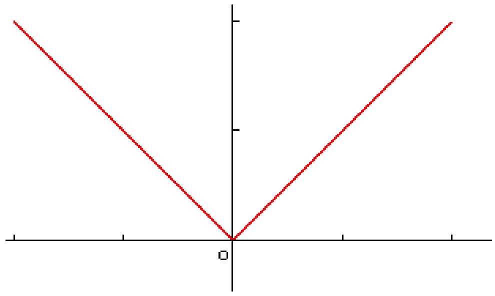
Continuité d'une fonction

Définition intuitive :Une fonction est continue sur un intervalle, si sa courbe représentative peut se tracer sans lever le crayon.

Définition : Soit une fonction f définie sur un intervalle I contenant un réel a.
- f est continue en a si : $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.
- f est continue sur I si f est continue en tout point de I.

Théorème : Si une fonction est dérivable sur un intervalle I, alors elle est continue sur cet intervalle.

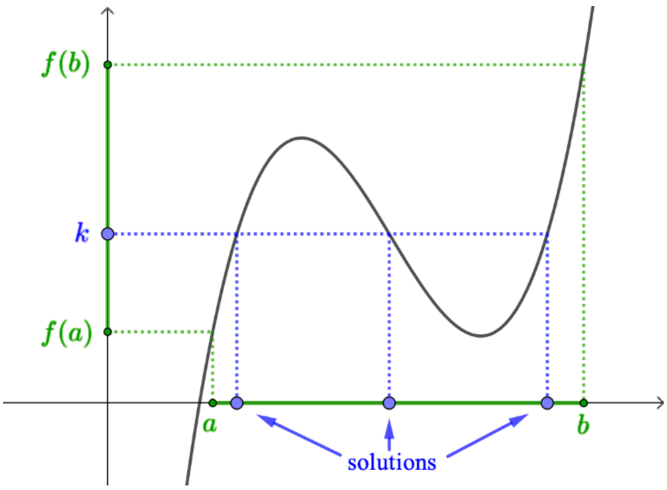
La réciproque est fausse . Contre -exemple : la fonction valeur absolue est continue sur ℝ mais est non dérivable sur ℝ car non dérivable en 0.



Remarques : toutes les fonctions de référence connues sont continues sur chaque intervalle de leur ensemble de définition.

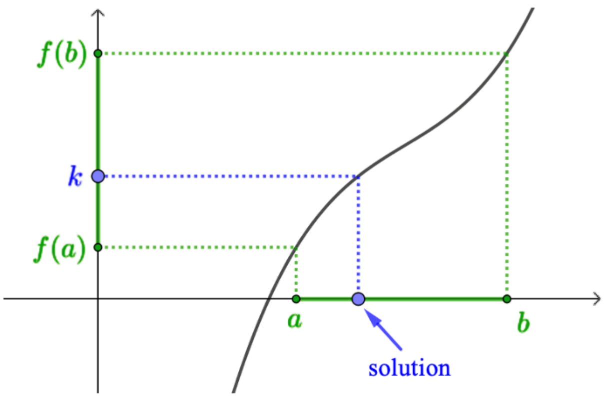
Théorème des valeurs intermédiaires

si une fonction f est **continue** sur l'intervalle $[a\,;b]$ alors pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet au moins une solution comprise entre a et b.



Corollaire du théorème des valeurs intermédiaires

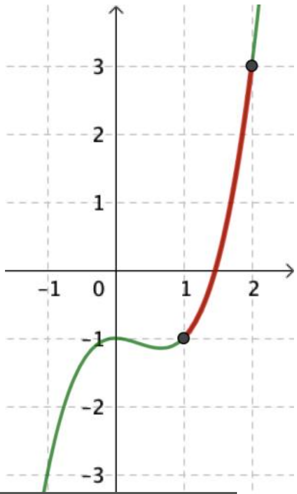
si une fonction f est **continue** et **strictement monotone** sur l'intervalle $[a\,;b]$ alors pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution comprise entre a et b.



Remarque : le théorème et son corollaire se généralisent aux intervalles non bornées…

Exemple : valeurs intermédiaires et balayage

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - x^2 - 1$.
1) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[1; +\infty[$.
2) À l'aide de la calculatrice, donner un encadrement au centième de la solution α.



1) • La fonction f est **continue** sur l'intervalle $[1; +\infty[$ car une fonction polynôme est continue sur $\mathbb{R}$.
• Pour tout réel x de $[1 ;+\infty[$, $f'(x) = 3x^2 - 2x = x(3x - 2)$
Donc, pour tout x de $[1; +\infty[$, $f'(x) > 0$.
La fonction f est donc **strictement croissante** sur l'intervalle $[1; +\infty[$.
• $f(1) = 1^3 - 1^2 - 1 = -1 < 0$
$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ (à démontrer) Donc $0 \in [-1\,; +\infty[$.

➞ D'après le **corollaire du théorème des valeurs intermédiaires**, l'équation $f(x) = 0$ admet alors une unique solution α sur l'intervalle $[1; +\infty[$.

2) A l'aide de la calculatrice, il est possible d'effectuer des « balayages » successifs en augmentant la précision. **Vidéo TI** **mathssa.fr/balayage**

X	Y1
1	-1
1.1	-0.879
1.2	-0.712
1.3	-0.493
1.4	-0.216
1.5	0.125
1.6	0.536
1.7	1.023

X	Y1
1.39	-0.246
1.4	-0.216
1.41	-0.185
1.42	-0.153
1.43	-0.121
1.44	-0.088
1.45	-0.054
1.46	-0.019
1.47	0.0156
1.48	0.0514
1.49	0.0878

● La solution est comprise entre 1,4 et 1,5.
car : $f(1{,}4) \approx -0{,}216 < 0$
$f(1{,}5) \approx 0{,}125 > 0$

● La solution est comprise entre 1,46 et 1,47.
car : $f(1{,}46) \approx -0{,}019 < 0$
$f(1{,}47) \approx 0{,}0156 > 0$
On en déduit , par balayage, que : $1{,}46 < \alpha < 1{,}47$.

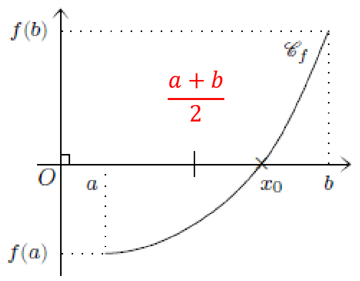
Algorithme de dichotomie

f est une fonction **continue et strictement monotone** sur un intervalle $[a\,;b]$.
On admet que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution x_0 dans l'intervalle $[a\,;b]$.

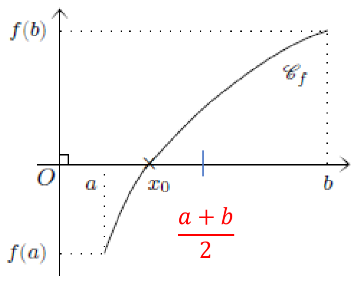
Principe : Tant que la précision n'est pas atteinte c'est-à-dire tant que on n'a pas trouvé d'intervalle d'amplitude donné contenant x_0 :

- trouver le « demi-intervalle » c'est-à-dire l' intervalle deux fois plus petit contenant x_0 .

Il y a deux cas de figure :



Le « demi -intervalle » est $[\frac{a+b}{2}\,; b]$



Le « demi -intervalle » est $[a; \frac{a+b}{2}]$

- on remplace ***a ou b par*** $\frac{a+b}{2}$ et on réitère le procédé

```python
from math import *
def f(x):
    y=x**3-x**2-1
    return(y)

def dico(a,b,p):
    while (b-a)>p:
        m=(a+b)/2
        if f(m)*f(a)>0:
            a=m
        else:
            b=m
    return(a,b)
```

Console Python

```
*** Python 3.8.8 (default, Apr 13 2021, :
bit (AMD64)] on win32. ***
*** Distant Python engine is active ***
>>>
*** Remote Interpreter Reinitialized ***
>>> dico(1,2,0.0001)
(1.46551513671875, 1.465576171875)
>>>
```

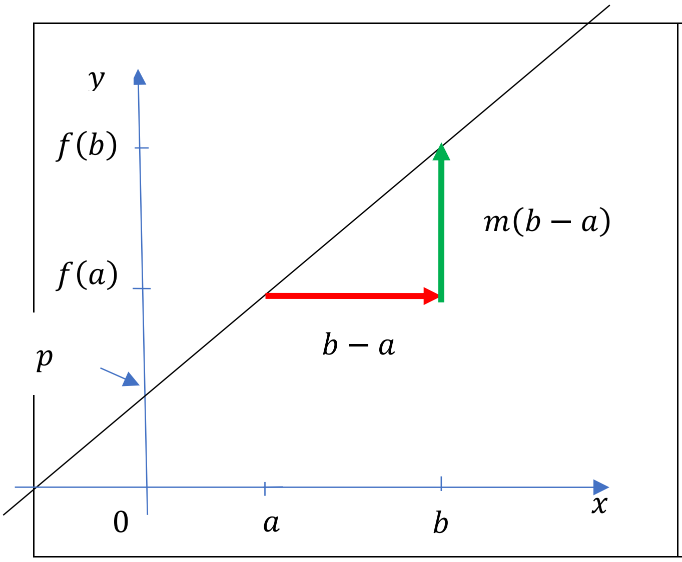
THEME 4 LES FONCTIONS DE REFERENCE

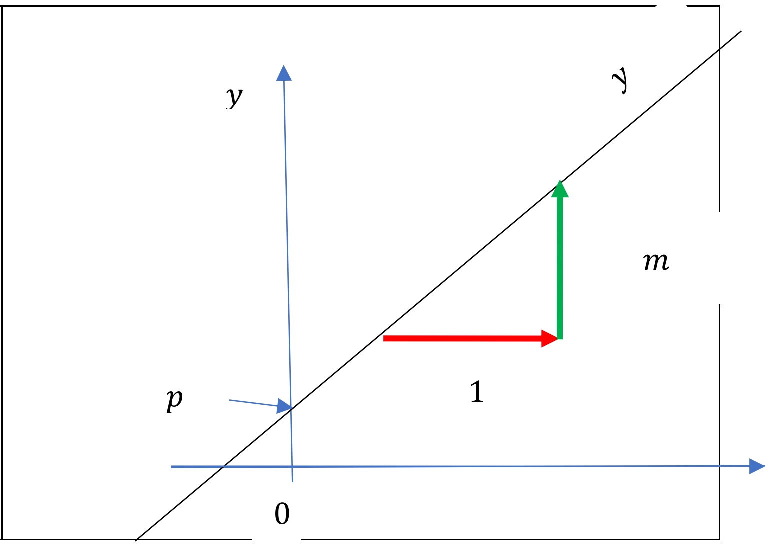
Les fonctions affines

Définitions

Une **fonction affine** f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = mx + p$, où m et p sont deux nombres réels.
m s'appelle le coefficient directeur et p l'ordonnée à l'origine.

Propriété : Soit la fonction affine f définie sur R par $f(x) = mx + p$.
La courbe de f est la droite d'équation $y = mx + p$.
Cette droite n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées.
Dans le cas d'une fonction linéaire, il s'agit d'une droite passant par l'origine du repère.
Dans le cas d'une fonction constante, il s'agit d'une droite parallèle à l'axe des abscisses





Pour s'entrainer : mathssa.fr/expraffine et mathssa.fr/repraffine

Propriété: Si A$(x_A; y_A)$ et B$(x_B; y_B)$ sont deux points d'abscisses différentes de la droite d'équation y=$mx + p$ alors :

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \qquad \left(m = \frac{accroissement des ordonnées}{accroissement des abscisses}\right)$$

Pour s'entrainer :**http://bref.jeduque.net/4t62me**

Exercice : équation réduite d'une droite à l'aide deux points Vidéo : mathssa.fr/pente (4mns30s)

Soit A$(4; -1)$ et B$(3; 5)$ deux points d'une droite d.Déterminer une équation de la droite d.

Les points A et B sont d'abscisses différentes . Une équation de la droite (d) est de la forme $y = mx + p$, où m et p sont deux nombres réels.
Le coefficient directeur de d est $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{5-(-1)}{3-4} = \frac{6}{-1} = -6$.
L'équation de d est donc de la forme : $y = -6x + p$
Comme A$(4; -1)$ appartient à la droite d, ses coordonnées vérifient l'équation de d soit :
$-1 = -6 \times 4 + p$ soit $-1 = -24 + p$ soit $p = -1 + 24 = 23$
Une équation de d est donc : $y = -6x + 23$

Pour s'entrainer : mathssa.fr/determaffine

Variations et signe d'une fonction affine

Propriété :

Soit f une fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = mx + p$.

- Si $m > 0$, alors f est croissante sur $\mathbb{R}$.
- Si $m < 0$, alors f est décroissante sur $\mathbb{R}$
- Si $m = 0$, alors f est constante sur $\mathbb{R}$.

Exemple : signe d'une fonction affine à l'aide des variations

Soit f la fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2x + 4$.
Dresser le tableau de signe de f.

$-2x + 4 = 0 \Leftrightarrow -2x = -4$

$\Leftrightarrow \quad x = \frac{-4}{-2} = 2$

Comme f est décroissante sur $\mathbb{R}$ et s'annule en 2 , on en déduit le tableau de signes :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f(x)$		+	**0**	-	

Exemple : signe d'une fonction affine à l'aide d'une inéquation

Soit f la fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2x + 4$.
Dresser le tableau de signe de f.

$-2x + 4 > 0 \Leftrightarrow -2x > -4$

$\Leftrightarrow \quad x < \frac{-4}{-2} = 2 \quad$ (on divise par -2<0)

Remarque importante : ces 2 méthodes peuvent s'appliquer pour d'autres types de fonctions

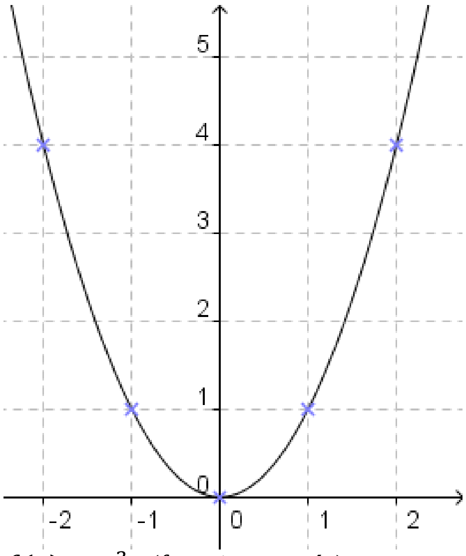
VARIATION + ANTECEDENT DE 0

SIGNE

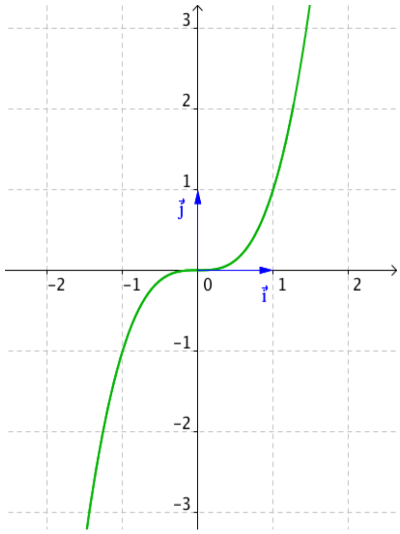
RESOLUTION D'UNE INEQUATION

Pour s'entrainer : http://bref.jeduque.net/7blkfc (faire les tableaux au brouillon) , mathssa.fr/signeaffine et mathssa.fr/signeaffine2

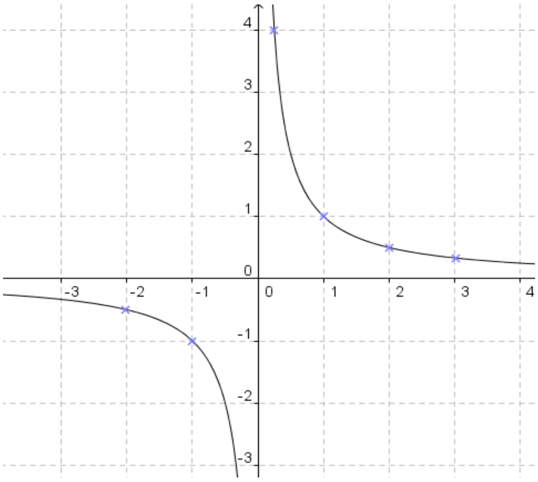
Fonctions vues en seconde (courbes)



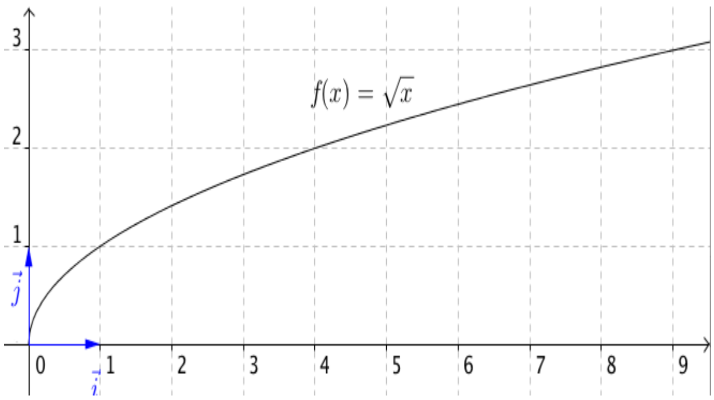
$f(x) = x^2$ (fonction carrée)



$f(x) = x^3$ (fonction cube)



$f(x) = \frac{1}{x}$ (fonction inverse)



$f(x) = \sqrt{x}$ (fonction racine carrée)

<u>Parité d'une fonction</u>

<u>Définitions:</u> f est la fonction définie sur D dont le centre est 0.
Une fonction f est <u>paire</u> lorsque pour tout réel x de D, $f(-x) = f(x)$.
(tout nombre et son opposé ont la même image)
Une fonction f est <u>impaire</u> lorsque pour tout réel x de D, $f(-x) = -f(x)$.
(tout nombre et son opposé ont des images opposés)

<u>Propriété :</u> dans un repère orthogonal , la courbe représentative d'une fonction paire admet l'axe des ordonnées comme axe de symétrie. Dans un repère orthogonal , la courbe représentative d'une fonction impaire admet le centre O du repère comme centre de symétrie.

Exemple : la fonction carrée est paire et la fonction inverse est impaire.

Pour s'entrainer : mathssa.fr/parite et mathssa.fr/parite2

Fonctions polynômes du second degré

Définitions : On appelle **fonction polynôme de degré 2** toute fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par une expression de la forme : $f(x) = ax^2 + bx + c$ où les coefficients a, b et c sont des réels donnés avec $a \neq 0$.

Pour tout polynôme du second degré $f(x) = ax^2 + bx + c$, il existe deux réels α et β tels que
$ax^2 + bx + c = a(x-\alpha)^2 + \beta$
L'expression $a(x-\alpha)^2 + \beta$ est la **forme canonique** du polynôme du second degré $ax^2 + bx + c$

Vidéos :obtention des formes canoniques à l'aide des identités remarquables :
mathssa.fr/canonique1 (6mns) et mathssa.fr/canonique2 (11mns)
Pour s'entrainer : mathssa.fr/formecano

Propriété : pas indispensable
$\alpha = -\frac{b}{2a}$ et $\beta = -\frac{\Delta}{4a}$ .La forme canonique du polynôme du second degré $ax^2 + bx + c$ est:
$ax^2 + bx + c = a(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{\Delta}{4a}$

Théorème :
Soit f le **polynôme du second degré** dont la forme canonique est $a(x-\alpha)^2 + \beta$
Si $a > 0$ alors f admet un minimum en $x = \alpha$ de valeur β
Si $a < 0$ alors f admet un maximum en $x = \alpha$ de valeur β

$a > 0$

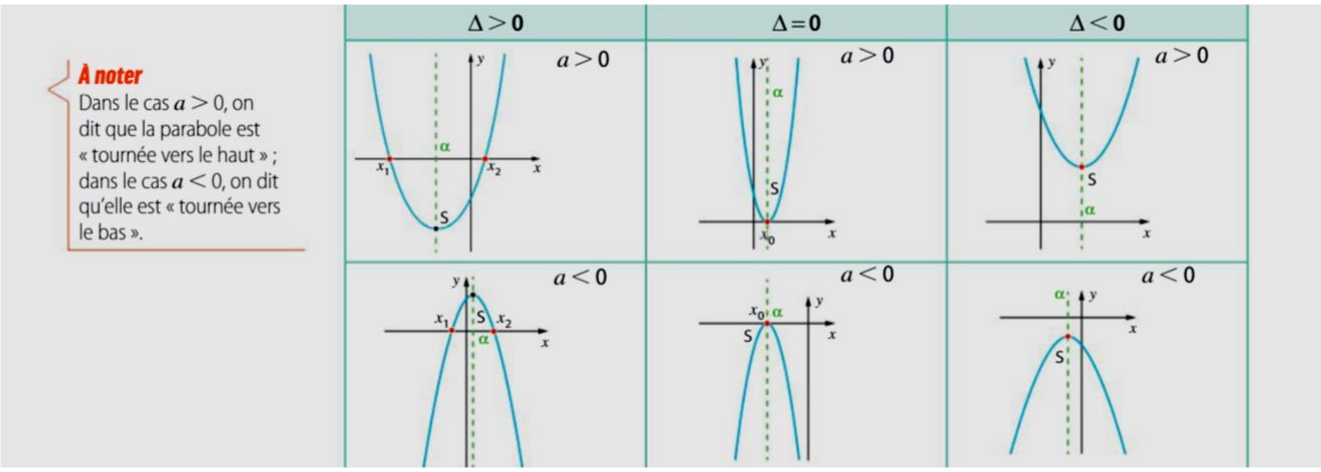
x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f(x)$	↘	β	↗

La courbe représentative de f est une parabole dont les branches sont orientées vers le haut de sommet S$(\alpha;\beta)$ d'axe de symétrie la droite d'équation $x = \alpha$

$a < 0$

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f(x)$	↗	β	↘

La courbe représentative de f est une parabole dont les branches sont orientées vers le bas de sommet S $(\alpha;\beta)$ d'axe de symétrie la droite d'équation $x = \alpha$



Pour s'entrainer : mathssa.fr/varpoldegre2

Propriété : Soit f le **polynôme du second degré** défini par $f(x) = ax^2 + bx + c$.
Si $a > 0$, f est convexe sur $\mathbb{R}$.
Si $a < 0$, f est concave sur $\mathbb{R}$.

Fonction exponentielle

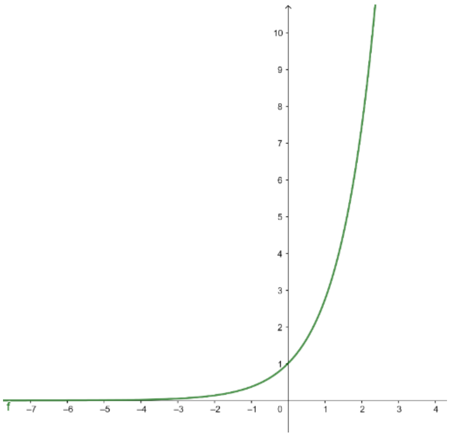
Définitions :
On appelle **fonction exponentielle** l'unique fonction *f* dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout réel *x*,
$f'(x) = f(x)$ et $f(0) = 1$.On note cette fonction **exp**.
L'image de 1 par la fonction exponentielle est notée *e*. On a ainsi $e = exp(1)$
e s'appelle la constante d'Euler.
Notation : On note pour tout *x* réel, $exp(x) = e^x$.

Propriétés :pour tout *x* réel, $exp'(x) = e^x$ et $e^0 = 1$.

Conséquences sur les propriétés algébriques :
Pour tous réels *x* et *y* et pour tout entier relatif *n*, on a

$e^{x+y} = e^x e^y$ $\quad$ $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$ $\quad$ $e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$ $\quad$ $e^{nx} = (e^x)^n$

Propriété :
La fonction exponentielle est **strictement positive** sur $\mathbb{R}$.



Corollaires :
- La fonction exponentielle est **continue** sur $\mathbb{R}$.
- La fonction exponentielle est **strictement croissante** sur $\mathbb{R}$.
- La fonction exponentielle est convexe sur $\mathbb{R}$.

(pour la convexité , $exp''(x) = e^x$ or $e^x > 0$ …)

Conséquence : Pour tous réels *a* et *b*, on a :
a) $e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$
b) $e^a < e^b \Leftrightarrow a < b$
c) $e^a > e^b \Leftrightarrow a > b$

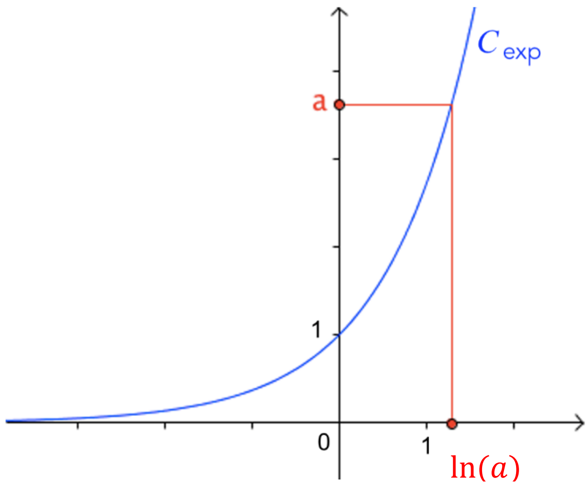
Exemple : Résoudre une équation ou une inéquation

Vidéos mathssa.fr/expo2 mathssa.fr/expo3 (2mns42s)
Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $e^{x^2-3} - e^{-2x}$ puis l'inéquation $e^{4x-1} \geq 1$.

a) $e^{x^2-3} - e^{-2x} = 0$ $\Leftrightarrow e^{x^2-3} = e^{-2x}$ $\Leftrightarrow x^2 - 3 = -2x$ $\Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 = 0$ $a = 1 , b = 2 , c = -3$ On calcule le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac = 16$ $\Delta > 0$. L'équation $x^2 + 2x - 3 = 0$ admet donc deux solutions : $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2-\sqrt{16}}{2} = -3$ $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2+\sqrt{16}}{2} = 1$ S={-3 ;1}	b)$e^{4x-1} \geq 1$ $\Leftrightarrow e^{4x-1} \geq e^0$ $\Leftrightarrow 4x - 1 \geq 0$ $\Leftrightarrow 4x \geq 1$ $\Leftrightarrow x \geq \frac{1}{4}$ S=$[\frac{1}{4} ; +\infty[$

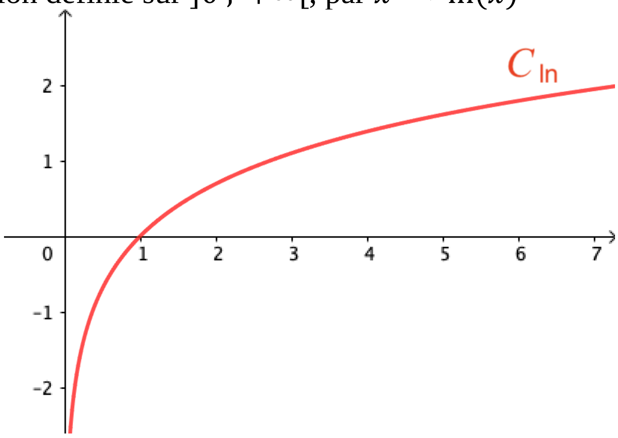
Propriété :
u est une fonction **dérivable** sur un intervalle I.
Alors la fonction *f* définie sur I par $f(x) = e^{u(x)}$ est dérivable sur I et pour tout réel *x* de I , on a :
$f'(x) = u'(x)e^{u(x)}$. Soit la formule $(e^u)' = u'e^u$

Fonction logarithme népérien



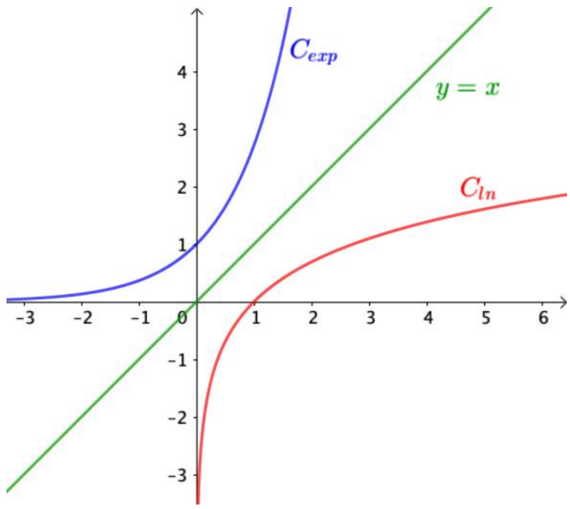
Définitions : ● On appelle **logarithme népérien** d'un réel strictement positif a, l'unique solution de l'équation $e^x = a$. On la note $\ln(a)$.

● La **fonction logarithme népérien**, notée **ln**, est la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$, par $x \longmapsto \ln(x)$



Propriétés :

- $ln(1) = 0\,; ln(e) = 1\,;\ ln\left(\frac{1}{e}\right) = -1$
- Pour tout x réel >0 , $x = e^y \Leftrightarrow y = \ln(x)$
- Pour tout x réel . $\ln(e^x) = x$
- Pour tout x réel >0 , $e^{\ln(x)} = x$



Remarques :
- La fonction ln est définie sur]0 ;+∞[
Pour s'entrainer mathssa.fr/defln

- Les fonctions exp et ln sont réciproques l'une de l'autre.

- Les courbes représentatives des fonctions exp et ln sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

Relation fonctionnelle

Théorème : Pour tous réels x et y strictement positifs, on a : $\ln(x \times y) = \ln(x) + \ln(y)$

Propriétés algébriques

Corollaires : Pour tous réels x et y strictement positifs, on a :

a) $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x)$

b) $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$

c) $\ln(\sqrt{x}) = \frac{1}{2}\ln(x)$

d) $\ln(x^n) = n\ln(x)$, avec n entier relatif

Exemple : simplifier les expressions suivantes :

$A=\ln(3-\sqrt{5})+\ln(3+\sqrt{5})$ $\qquad B=3\ln(2)+\ln(5)-2\ln(3)$ $\qquad C=\ln(e^2)-\ln\left(\frac{2}{e}\right)$

Correction

$$A=\ln(3-\sqrt{5})+\ln(3+\sqrt{5})$$
$$=\ln\left((3-\sqrt{5})(3+\sqrt{5})\right)$$
$$=\ln(9-5)=\ln(4)$$

$$B=3\ln(2)+\ln(5)-2\ln(3)$$
$$=\ln(2^3)+\ln(5)-\ln(3^2)$$
$$=\ln\left(\frac{2^3\times 5}{3^2}\right)=\ln\left(\frac{40}{9}\right)$$

$$C=\ln(e^2)-\ln\left(\frac{2}{e}\right)$$
$$=2-\ln(2)+\ln(e)$$
$$=2-\ln(2)+1=3-\ln(2)$$

Résoudre une équation avec des logarithmes

Résoudre l'équation $\ln(x-3)+\ln(9-x)=0$.

- L'équation a un sens si $x-3>0$ et $9-x>0$.

Soit $x>3$ et $x<9$. Le domaine de définition est donc D=]3 ;9[

- $\ln(x-3)+\ln(9-x)=0$

$$\ln\left((x-3)(9-x)\right)=0 \Leftrightarrow \ln\left((x-3)(9-x)\right)=0$$
$$\Leftrightarrow (x-3)(9-x)=e^0$$
$$\Leftrightarrow -x^2+12x-27=1$$
$$\Leftrightarrow -x^2+12x-28=0$$
On résout une équation du second degré

$\Delta=12^2-4\times(-1)\times(-28)=32.$ $\Delta>0$. L'équation admet deux solutions réelles:

$$x_1=\frac{-12+\sqrt{32}}{-2}=6-2\sqrt{2} \quad \text{et} \quad x_2=\frac{-12-\sqrt{32}}{-2}=6+2\sqrt{2}$$

Les solutions sont donc $6-2\sqrt{2}$ et $6+2\sqrt{2}$ car elles appartiennent à l'intervalle $I=]3\,;9[$.

S=$\{6-2\sqrt{2}\ ;6+2\sqrt{2}\}$

Résoudre une inéquation avec des logarithmes

Vidéo : mathssa.fr/inequaln

a) Résoudre l'inéquation $e^x+5>4\,e^x$.

b) Résoudre l'inéquation $\ln(6x-1)\geq 2$ sur l'intervalle $I=\left]\frac{1}{6}\ ;\ +\infty\right[$.

a) $e^x+5>4\,e^x \Leftrightarrow e^x-4\,e^x>-5$ $\Leftrightarrow -3\,e^x>-5$ $\Leftrightarrow e^x<\frac{5}{3}$ $\Leftrightarrow \ln(e^x)<\ln\left(\frac{5}{3}\right)$ (ln est strictement croissante sur]0;+∞[[$\Leftrightarrow x<\ln\left(\frac{5}{3}\right)$ L'ensemble solution est donc l'intervalle $S=\left]-\infty\,;\ln\left(\frac{5}{3}\right)\right[$.	b)On résout l'inéquation dans l'intervalle $I=\left]\frac{1}{6}\ ;\ +\infty\right[$, car $6x-1>0$. Soit $x>\frac{1}{6}$. $\ln(6x-1)\geq 2$ $\Leftrightarrow e^{\ln(6x-1)}\geq e^2$(ln est strictement croissante sur $\mathbb{R}$) $\Leftrightarrow 6x-1\geq e^2$ $\Leftrightarrow 6x\geq e^2+1$ $\Leftrightarrow x\geq\frac{e^2+1}{6}$ L'ensemble solution est donc l'intervalle $\left[\frac{e^2+1}{6}\ ;\ +\infty\right[$ car il est inclus dans $I=\left]\frac{1}{6}\ ;\ +\infty\right[$.

Exemple : rechercher un seuil à l'aide des logarithmes népériens voir aussi p23

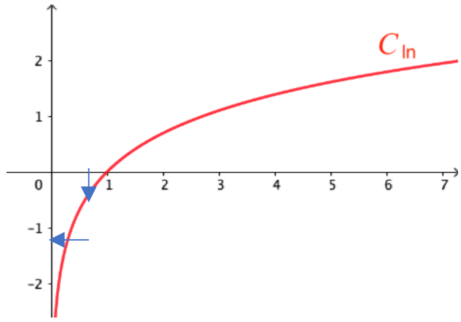
Déterminer le plus petit entier naturel n tel que $0{,}8^n < 0{,}01$.

$0{,}8^n < 0{,}01 \Leftrightarrow \ln(0{,}8^n) < \ln(0{,}1)$ *car ln est tsttricttementt croissante sur]0 ;+∞[*

$\Leftrightarrow n\ln(0{,}8) < \ln(0{,}1)$

$\Leftrightarrow n > \frac{\ln(0{,}1)}{\ln(0{,}8)}$ $\quad car\ ln(0{,}8) < 0$

$\Leftrightarrow n \geq 11$



Le plus petit entier naturel n tel que $0{,}8^n < 0{,}01$ est 11.

<u>Propriété :</u> La fonction logarithme népérien est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ et pour tout réel $x > 0$, $(\ln(x))' = \frac{1}{x}$.

<u>Propriété :</u>

u est une fonction **<u>dérivable</u>** sur un intervalle I et strictement positive sur I.

Alors la fonction *f* définie sur I par ln $(u(x))$ est dérivable sur I et pour tout réel *x* de I , on a : $f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$.

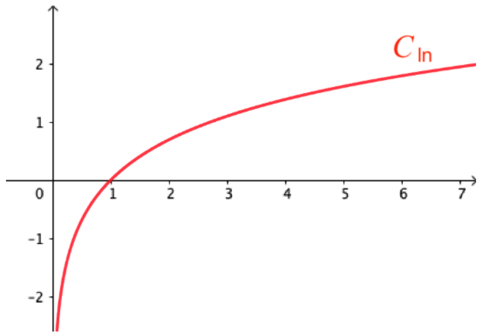
Soit la formule $(ln(u))' = \frac{u'}{u}$

Pour s'entrainer : mathssa.fr/deriveelnu

<u>Corollaires:</u>

- La fonction logarithme népérien est continue sur $]0\,;\,+\infty[$.
- La fonction logarithme népérien est strictement croissante sur $]0\,;\,+\infty[$.
- La fonction logarithme népérien est concave sur $]0\,;\,+\infty[$.

(pour la concavité, $ln''(x) = -\frac{1}{x^2}$ or $-\frac{1}{x^2} < 0\ldots$)



<u>Logarithme décimal</u>

Dans le domaine scientifique, on utilise la fonction logarithme décimale, notée **log**, et définie par :

$$\log(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(10)}$$

<u>Propriétés algébriques :</u>toutes les propriétés algébriques de ln s'appliquent

$\log(10) = 1$ et pour tout entier relatif n, $\log(10^n) = n$

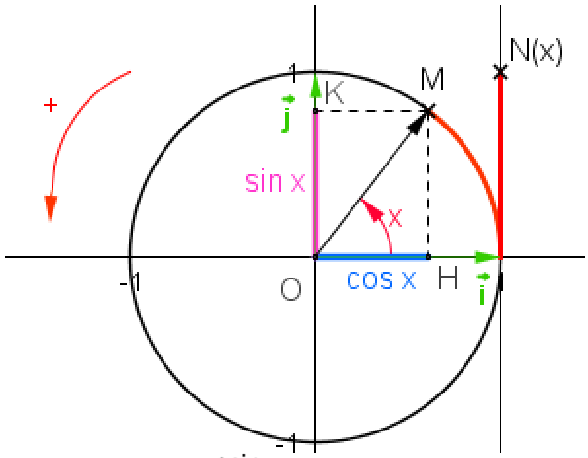
Pour s'entrainer : mathssa.fr/calculslog

Les fonctions trigonométriques

Vidéo : mathssa.fr/trigo

Définition : La **mesure principale d'un angle orienté** est la mesure, qui parmi toutes les autres, se situe dans l'intervalle $]-\pi\ ;\ \pi]$.
Pour s'entrainer : mathssa.fr/mesprincip

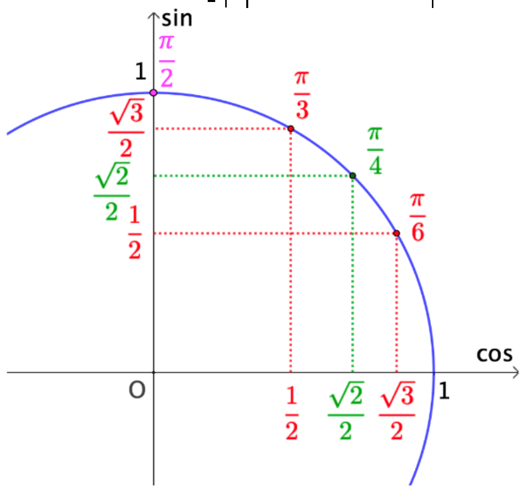
Définitions : Soit M le point du cercle trigonométrique associé au nombre x (qui est un angle orienté).
- Le **cosinus** de x est l'abscisse de M et on note $\mathbf{cos}(x)$.
- Le **sinus** de x est l'ordonnée de M et on note $\mathbf{sin}\ (x)$.



Propriétés :
1) $-1 \leq \sin(x) \leq 1$ et $-1 \leq \cos(x) \leq 1$
2) $cos^2(x) + sin^2(x) = 1$

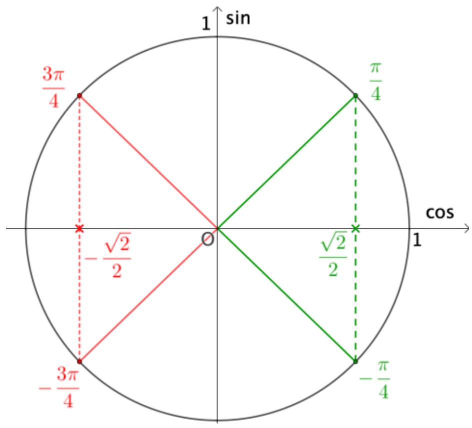
Valeurs remarquables :

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0

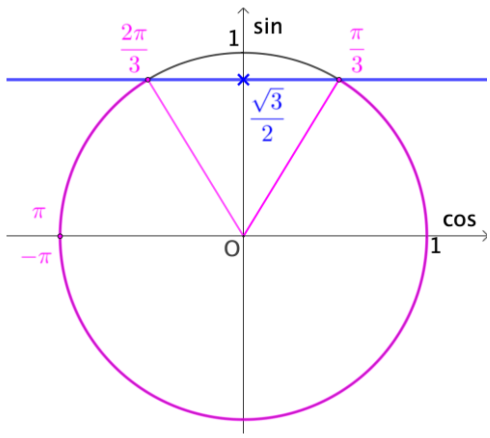


Pour s'entrainer : mathssa.fr/valremarq

Résolution d'équations et d'inéquations trigonométriques
Vidéos : mathssa.fr/trigo5 mathssa.fr/equatrig , mathssa.fr/equatrig2 et mathssa.fr/inequatrig
1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\cos^2(x) = \frac{1}{2}$.
2) Résoudre dans $[-\pi\ ;\ \pi]$, l'inéquation : $\sin(x) \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$.



Correction
1) $\cos^2(x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow\ \cos(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ou $\cos(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
Les solutions de l'équations sont les réels de la forme :
$x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ ou $x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$
Ou $x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ ou $x = -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$
2) $\sin(x) \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$
- On commence par résoudre l'équation $\sin(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ dans $[-\pi\ ;\ \pi]$.
Soit : $x = \frac{\pi}{3}$ ou $x = \frac{2\pi}{3}$.
- On veut des valeurs de sinus inférieures à $\frac{\sqrt{3}}{2}$.
Elles correspondent à la partie du cercle trigonométrique située en dessous des points associés à $\frac{\pi}{3}$ et $\frac{2\pi}{3}$.
Ainsi : $S = \left[-\pi\ ;\ \frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{2\pi}{3}\ ;\ \pi\right]$



Parité - périodicité

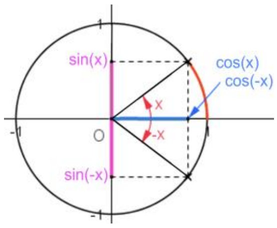
Une fonction f est T- périodique sur D si pour tout x de D , $x + T$ appartient à D et $f(x + T) = f(x)$.
Une fonction f est paire lorsque pour tout réel x de son ensemble de définition D, $-x$ appartient à D et $f(-x) = f(x)$
Une fonction f est impaire lorsque pour tout réel x de son ensemble de définition D, $-x$ appartient à D et $f(-x) = -f(x)$

Conséquences graphiques :

La courbe d'une fonction **T périodique** s'obtient à partir de la courbe sur une période à l'aide de **translations successives** de vecteur $kT\vec{i}$ (k entier relatif)
La courbe d'une fonction **paire** admet l'**axe des ordonnées** comme **axe de symétrie.**
La courbe d'une fonction **impaire** admet l'origine **O** comme **centre de symétrie**

Propriétés :

-Pour tout réel x, $\cos(x + 2k\pi) = \cos(x)$ et $\sin(x + 2k\pi) = \sin(x)$ $\quad$ $(k\ entier\ relatif)$
(les fonctions cosinus et sinus sont **périodiques de période** 2π)
- Pour tout réel x, $\cos(-x) = \cos(x)$ et $\sin(-x) = -\sin(x)$
(la fonction cosinus est paire et la fonction sinus est impaire)



Remarque : la périodicité des fonctions cos et sin nous permettent de réduire l'intervalle d'étude à un intervalle de longueur la période 2π comme [-π ;π]. La parité nous permet de réduire l'intervalle de moitié . On peut étudier ces fonctions sur une demi période : [0 ;π]

Théorème : les fonctions cosinus et sinus sont dérivables sur ℝ (donc continues) et pour tout réel x, on a
$cos'(x) = -sin(x)$ $\quad$ et $\quad$ $sin'(x) = cos(x)$

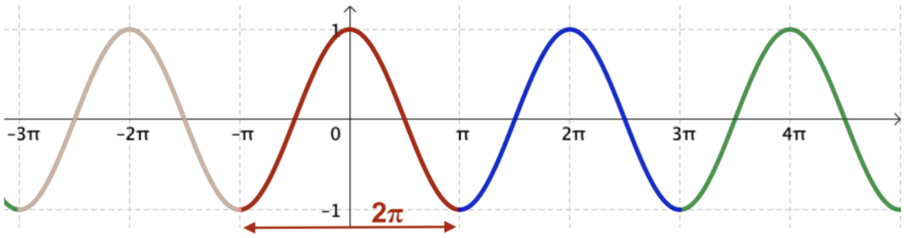
Variations des fonctions cos et sin

Animation : mathssa.fr/varcossin

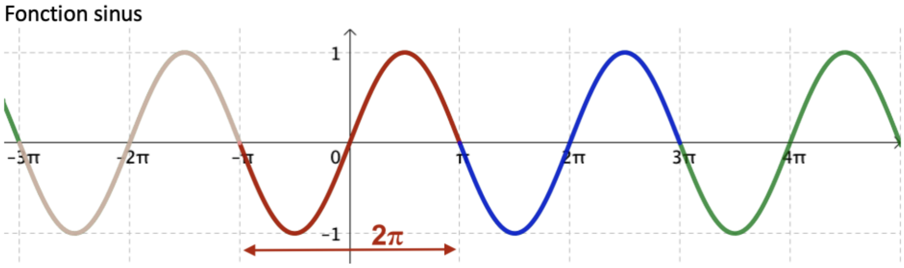
x	0		π
$cos'(x) = -sin(x)$	0	-	0
$\cos(x)$	1 1		-

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$sin'(x) = cos(x)$		+	0	-	
$\sin(x)$	0		1		0

Fonction cosinus



Fonction sinus



	Fonction f	Dérivée f'
	$\cos(u)$	$-u'\sin(u)$
	$sin(u)$	$u'cos(u)$

Autres formules :

1) $\cos(\pi + x) = -\cos(x)$ et $\sin(\pi + x) = -\sin(x)$
2) $\cos(\pi - x) = -\cos(x)$ et $\sin(\pi - x) = \sin(x)$
3) $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin(x)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos(x)$
4) $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$

Pour s'entrainer : mathssa.fr/formulestrigo

THEME 5 INTEGRATION

Equations différentielles

Définition :
Soit une fonction f définie sur un intervalle I.La fonction g est une **solution** de l'équation différentielle $y' = f$ si et seulement si pour tout x de I, $g'(x) = f(x)$.

Propriété :
Les solutions de l'équation différentielle $y' = ay$, $a \in \mathbb{R}$, sont les fonctions de la forme $x \longmapsto Ce^{ax}$, où C est une constante réelle quelconque.

Exemple :résoudre l'équation différentielle (E) : $3y' + 5y = 0$.

Correction

$3y' + 5y = 0 \Leftrightarrow \quad 3y' = -5y \Leftrightarrow \quad y' = -\frac{5}{3}y$

Les solutions de l'équation différentielle (E) sont les fonctions de la forme : $x \longmapsto Ce^{-\frac{5}{3}x}$, $C \in \mathbb{R}$.

Pour s'entrainer : mathssa.fr/equadif

Propriété : Si f et g sont deux solutions de l'équation différentielle $y' = ay$, $a \in \mathbb{R}$, alors $f + g$ et kf, $k \in \mathbb{R}$, sont également solutions de l'équation différentielle.

Propriété : La fonction $x \longmapsto -\frac{b}{a}$ est solution de l'équation différentielle $y' = ay + b$ $(a \neq 0)$. Cette solution est appelée **solution particulière constante**.

Propriété :
Les solutions de l'équation différentielle $y' = ay + b$ $(a \neq 0)$ sont les fonctions de la forme $x \longmapsto Ce^{ax} - \frac{b}{a}$, où $C \in \mathbb{R}$.

Solution de l'équation $y' = ay$

Solution particulière constante de l'équation $y' = ay + b$

Remarque : L'équation $y' = ay + b$ est appelée équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants.

Exemple : Résoudre une équation différentielle du type $y' = ay + b$

Vidéos : mathssa.fr/equadif4 et tmathssa.fr/equadif5
On considère l'équation différentielle (E) : $2y' - y = 3$.
a) Déterminer la forme générale des fonctions solutions de l'équation.
b) Déterminer l'unique solution f telle que $f(0) = -1$.

Correction

a) $2y' - y = 3 \Leftrightarrow \quad 2y' = y + 3 \Leftrightarrow \quad y' = \frac{1}{2}y + \frac{3}{2} \qquad a = \frac{1}{2} \quad b = \frac{3}{2}$

- Une solution particulière constante est la fonction : $x \longmapsto -3$ car $-\frac{b}{a} = -\frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}} = -3$.
- Les solutions de l'équation différentielle $y' = \frac{1}{2}y$ sont de la forme : $x \longmapsto Ce^{\frac{1}{2}x}$, $C \in \mathbb{R}$.
- Les solutions de l'équation différentielle $2y' - y = 3$ sont les fonctions de la forme :

$$x \longmapsto Ce^{\frac{1}{2}x} - 3,\ C \in \mathbb{R}$$

$b)f$ est solution de l'équation différentielle, donc de la forme : $f(x) = Ce^{\frac{1}{2}x} - 3, C \in \mathbb{R}$

Donc $f(0) = Ce^{\frac{1}{2}\times 0} - 3 = C - 3$

Or, $f(0) = -1 \Leftrightarrow C - 3 = -1 \Leftrightarrow \quad C = 3 - 1 = 2$

Et donc : $f(x) = 2e^{\frac{1}{2}x} - 3$

Pour s'entrainer : mathssa.fr/equadif2

Propriété :

f est une fonction définie sur un intervalle I.

Les solutions de l'équation différentielle $y' = ay + f$ $(a \neq 0)$ sont les fonctions de la forme :

$$x \longmapsto Ce^{ax} + p(x), \text{ où } C \in \mathbb{R}.$$

Solution de l'équation $y' = ay$

Solution particulière de l'équation $y' = ay + f$

Exemple : Résoudre une équation différentielle du type $y' = ay + f$

Vidéo mathssa.fr/equadif6

On considère l'équation différentielle $y' - 2y = x^2$.

a) Démontrer que la fonction p définie sur $\mathbb{R}$ par $p(x) = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$ est solution particulière de l'équation différentielle.

b) En déduire la forme générale de toutes les solutions de l'équation différentielle.

Correction

a)Pour tout reel x, $p'(x) = -\frac{1}{2} \times 2x - \frac{1}{2} = -x - \frac{1}{2}$

Donc : $p'(x) - 2p(x) = -x - \frac{1}{2} - 2 \times \left(-\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\right)$

$$= -x - \frac{1}{2} + x^2 + x + \frac{1}{2}$$

$$= x^2$$

On a donc : $p'(x) - 2p(x) = x^2$

La fonction p définie sur $\mathbb{R}$ par $p(x) = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$ est donc une solution particulière de l'équation différentielle $y' - 2y = x^2$.

b) Les solutions de l'équation différentielle $y' = 2y$ sont de la forme $x \longmapsto Ce^{2x}$, $C \in \mathbb{R}$.

On en déduit que les solutions de l'équation différentielle $y' - 2y = x^2$ sont les fonctions de la forme :

$f(x) = Ce^{2x} - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$, $C \in \mathbb{R}$.

Pour s'entrainer : mathssa.fr/equadif3

Primitives

Définition : f est une fonction définie sur un intervalle I.
On appelle **primitive** de f, une fonction F dérivable sur I, telle que : $F' = f$.

Remarque :
F est une primitive de f si et seulement si F est une solution de l'équation différentielle $y' = f$.

Propriétés :

- Toute fonction continue f sur un intervalle I admet au moins une primitive F sur cet intervalle.
- On suppose que F est une **primitive** de f.

G est une **primitive** de f si et seulement si il existe un réel k tel que $G = F + k$.

Conséquences :

- Deux primitives d'une même fonction f continue sur un intervalle I diffèrent d'une constante.
- On dit que l'ensemble des **primitives** d'une fonction continue f sur I est l'ensemble des fonctions G définies sur I par $G(x) = F(x) + k$, avec $k \in \mathbb{R}$.
- On suppose que f est continue sur I.

Soient x_0 un réel de I et y un réel . Il existe une unique primitive G de f sur I telle que $G(x_0) = y_0$

Exemple: primitive avec condition initiale vidéo : mathssa.fr/equadif7
soit les deux fonctions suivantes définies sur $]0;+\infty[$
$f(x) = ln(x)$ et $F(x) = x(ln(x) - 1)$.
1.Démontrer que F est **une** primitive de f sur $]0;+\infty[$.
2.Déterminer **la** primitive de f qui s'annule en 1.

Correction :
1.F est dérivable sur $]0;+\infty[$ en tant que produit de fonctions dérivables sur $]0;+\infty[$.

Pour tout réel x de $]0;+\infty[$,

- $F = uv$
- $u(x) = x \qquad u'(x) = 1$
  $v(x) = ln(x) - 1 \qquad v'(x) = \frac{1}{x}$
- $F' = u'v + uv'$

$F'(x) = 1(\ln(x) - 1) + x \times \frac{1}{x} = \ln(x) - 1 + 1 = \ln(x) = f(x)$

Comme $F' = f$ alors F est une primitive de f.

2.On cherche la primitive G de la fonction f qui s'annule en $x = 1$, soit : $G(1) = 0$.

Si G est une primitive de f alors : $G(x) = F(x) + k$, où k est un nombre réel.
Donc : $G(1) = F(1) + k$

Et donc : $F(1) + k = 0 \Leftrightarrow 1(ln(1) - 1) + k = 0 \Leftrightarrow -1 + k = 0 \Leftrightarrow k = 1$
La primitive de la fonction f qui s'annule en $x = 1$ est G telle que :
$G(x) = x(\ln(x) - 1) + 1$

Primitives de fonctions de référence

Fonction f	Une primitive F
$a, \ a \in \mathbb{R}$	ax
x^n avec $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\,;0\}$	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}$
$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x}$
$\frac{1}{x}$ avec $x > 0$	$\ln(x)$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$
e^x	e^x
$\cos(x)$	$\sin(x)$
$\sin(x)$	$-\cos(x)$

Propriété de linéarité des primitives :
Si F est une primitive de f et G est une primitive de g alors :
$F + G$ est une primitive de $f + g$ et kF est une primitive de kf, avec k réel.

Exemples : déterminer une primitive à l'aide de la linéarité
vidéos : mathssa.fr/primitive , mathssa.fr/primitive2 et mathssa.fr/primitive3
Dans chaque cas, déterminer une primitive F de la fonction f.

a) $f(x) = x^3 - 2$ b) $f(x) = 3x^2 - \frac{3}{x^2}$ c) $f(x) = \frac{1}{x^5}$

d) $f(x) = \frac{3}{x}$ sur $]0\,;\,+\infty[$ e) $f(x) = -\sin(x)$ f) $f(x) = \frac{2}{\sqrt{x}}$

Correction

a) $F(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x$

b) $f(x) = 3x^2 - \frac{3}{x^2} = 3x^2 - 3 \times \frac{1}{x^2}$ donc $F(x) = x^3 - 3 \times \left(-\frac{1}{x}\right) = x^3 + \frac{3}{x}$

c) $f(x) = \frac{1}{x^5} = x^{-5}$ $F(x) = \frac{1}{-4}x^{-4} = -\frac{1}{4x^4}$

d) $f(x) = \frac{3}{x} = 3 \times \frac{1}{x}$ $F(x) = 3\ln(x)$

e) $f(x) = -\sin(x)$ $F(x) = -(-\cos(x)) = \cos(x)$

f) $f(x) = \frac{2}{\sqrt{x}} = 2 \times \frac{1}{\sqrt{x}}$ $F(x) = 2 \times 2\sqrt{x} = 4\sqrt{x}$

Formules avec les primitives

Fonction	Une primitive
$u'u^n$ $avec\ n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\,;0\}$	$\frac{1}{n+1}u^{n+1}$
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$
$u'e^u$	e^u
$\frac{u'}{u}$ $avec\ u > 0$	$\ln(u)$
$u'\cos(u)$	$\sin(u)$
$u'\sin(u)$	$-\cos(u)$

Exemple : Déterminer une primitive à l'aide des formules Vidéo :mathssa.fr/primitive4
Déterminer une primitive F de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2e^{x^3}$

Correction : $f(x) = x^2e^{x^3}$
f est continue sur $\mathbb{R}$ donc admet au moins une primitive F.

- $f = \frac{1}{3}u'e^u$
- $u(x) = x^3 \rightarrow u'(x) = 3x^2$ flashback (si on réécrit $u'e^u$ apparait la constante 3)
- $F = \frac{1}{3}e^u$

Pour tout réel x, $F(x) = \frac{1}{3}e^{x^3}$

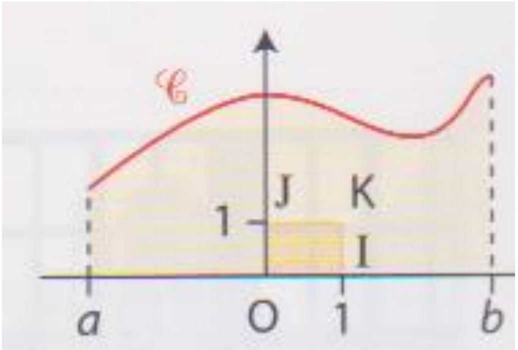
Intégrale d'une fonction continue

Définition :

Soit f une fonction **continue** et **positive** sur un intervalle [a ; b].

Soit $\mathscr{C}$ la courbe de f dans un repère orthogonal (O ; $\overrightarrow{OI}$; $\overrightarrow{OJ}$).

L'**unité d'aire** est l'aire du rectangle OIKJ (rectangle de coté 1)



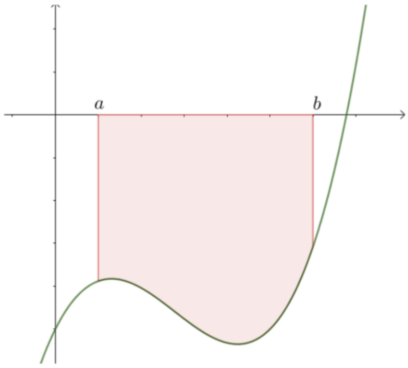
L'intégrale de a à b de la fonction f, notée $\int_b^a f(x)\,dx$est l'aire du domaine compris entre l'axe des abscisses , la courbe de f et les droites d'équation $x=a$ et $x=b$.

Cette aire est aussi appelée « **aire du domaine sous la courbe de f entre a et b** »

<u>Extension aux fonctions de signe quelconque</u>

Soit f une fonction **continue** et négative sur un intervalle [a ; b].

L'intégrale de a à b de la fonction f, notée $\int_b^a f(x)\,dx$est l'opposé de l'aire du domaine compris entre l'axe des abscisses , la courbe de f et les droites d'équation $x=a$ et $x=b$.



<u>Propriétés sur les bornes d'intégration :</u>

$a)\ \displaystyle\int_a^a f(x)\,dx = 0$

$b)\ \displaystyle\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$

$c)$ Relation de Chasles : $\displaystyle\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$

<u>Exemple :</u> déterminer une intégrale par calculs d'aire (2)

Vidéo **mathssa.fr/integration**

Représenter la droite d'équation $y = 3 - x$ dans un repère.

En déduire $\int_2^5 3 - x\,dx$ en effectuant des calculs d'aire.

Correction

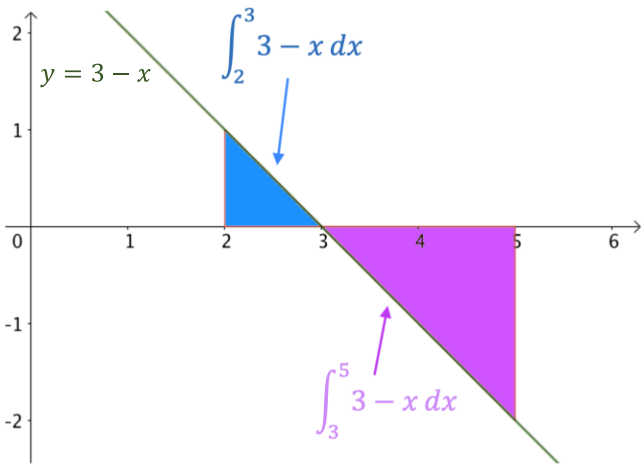
La droite d'équation $y = 3 - x$ coupe l'axe des abscisses en $x = 3$.

Donc, $3 - x \geq 0$ sur l'intervalle $[2\,;3]$

Et, $3 - x \leq 0$ sur l'intervalle $[3\,;5]$.

D'après la relation de Chasles, on a :

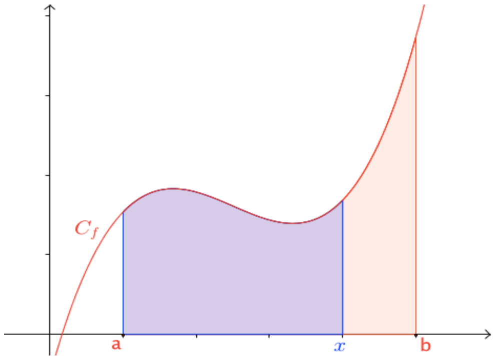
$$\int_2^5 3 - x\,dx = \int_2^3 3 - x\,dx + \int_3^5 3 - x\,dx$$



Donc :

$$\int_2^5 3 - x\,dx = \frac{1 \times 1}{2} + \left(-\frac{2 \times 2}{2}\right)$$
$$= -1{,}5$$

Intégrale et primitives



Théorème : Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a\,;b]$.
La fonction F définie sur $[a\,;b]$ par :
$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ est la primitive de f qui s'annule en a.

Conséquence immédiate :

Toute fonction continue sur un intervalle admet des primitives.

Propriété : Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a\,;b]$.
Si F est une primitive de f alors : $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$.

Définition générale d'une intégrale :
Soit f une fonction continue sur un intervalle I contenant a et b.
Si F est une primitive de f alors : $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$.

Notation :

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Exemple : calcul intégral
Vidéos :mathssa.fr/integration2 , mathssa.fr/integration3 et mathssa.fr/integration4
Calculer : $A = \int_2^5 3x^2 + 4x - 5\,dx$

Correction
$$A = \int_2^5 3x^2 + 4x - 5\,dx$$
On a : $f(x) = 3x^2 + 4x - 5$ f est continue sur $\mathbb{R}$ donc admet des primitives
Une primitive de f est la fonction F telle que : $F(x) = x^3 + 2x^2 - 5x$
$$A = \int_2^5 3x^2 + 4x - 5\,dx$$
$= [x^3 + 2x^2 - 5x]_2^5$
$= 5^3 + 2 \times 5^2 - 5 \times 5 - (2^3 + 2 \times 2^2 - 5 \times 2) = 144$

Relation de Chasles :
$\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$

Propriété de linéarité des intégrales:
a) Pour k réel, $\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$
b) $\int_a^b f(x) + g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$

Propriétés de positivité:

a) Si, pour tout x de $[a\,;b]$, $f(x) \geq 0$, alors $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$

b) Si, pour tout x de $[a\,;b]$, $f(x) \leq 0$, alors $\int_a^b f(x)\,dx \leq 0$

Propriétés de conservation de l'ordre:

a)Si, pour tout x de $[a\,;b]$, $f(x) \geq g(x)$, alors $\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx$

b)Si, pour tout x de $[a\,;b]$, $f(x) \leq g(x)$, alors $\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$

Valeur moyenne d'une fonction

Définition : Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a\,;b]$ avec $a \neq b$.
On appelle **valeur moyenne** de f sur $[a\,;b]$ le nombre réel :

$$m = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

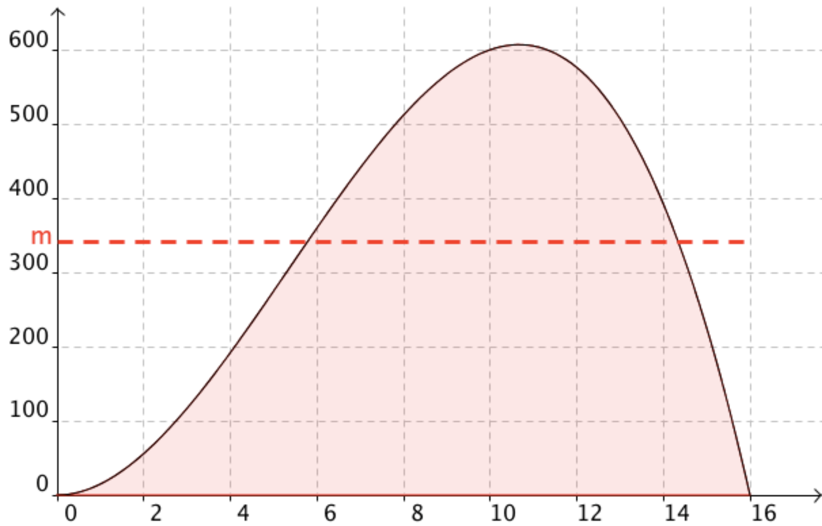
Exemple : Calculer la valeur moyenne d'une fonction

Vidéo :mathssa.fr/valeurmoyenne

On modélise, à l'aide d'une fonction, le nombre de malades lors d'une épidémie.
Au x-ième jour après le signalement des premiers cas, le nombre de malades est égale à $f(x) = 16x^2 - x^3$.
Déterminer le nombre moyen de malades chaque jour sur une période de 16 jours.

Correction

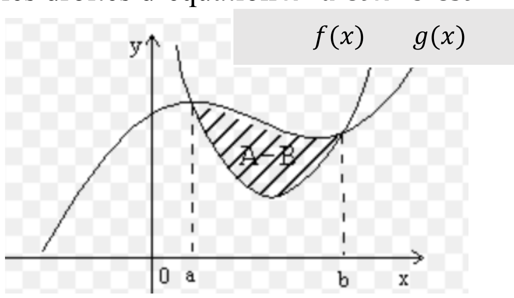
$$m = \frac{1}{16-0}\int_0^{16} f(x)\,dx$$
$$= \frac{1}{16}\int_0^{16} 16x^2 - x^3\,dx$$
$$= \frac{1}{16}\left[\frac{16}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4\right]_0^{16}$$
$$= \frac{1}{16}\left(\frac{16}{3}\times 16^3 - \frac{1}{4}\times 16^4\right)$$
$$= \frac{1024}{3} \approx 341$$



Le nombre moyen de malades chaque jour est environ égal à 341.

Aire du domaine entre 2 courbes

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I contenant les réels a et b avec $a<b$ telles que pour tout x de $[a\,;b]$, $f(x) \leq g(x)$ alors
l'aire du domaine compris entre la courbe Cf , la courbe Cg et les droites d'équation $x=a$ et $x=b$ est égal à $\int_a^b (g(x) - f(x))dx$



Intégration par parties

Théorème :
Soit u et v deux fonctions dérivables sur $[a\,;b]$ et dont les dérivées u' et v' sont continues sur $[a\,;b]$.
Alors, on a :

$$\int_a^b u'(x)v(x)\,dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)\,dx$$

Exemple : Calculer une intégrale en intégrant par parties

Vidéos : mathssa.fr/ipp   mathssa.fr/ipp2 et mathsssa.fr/ipp3

Calculer $A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin(x)\,dx$

Correction

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{x}_{v}\,\underbrace{\sin(x)}_{u'}\,dx$$

➽ *Ce choix n'est pas anodin ! L'idée est ici de ne plus laisser le facteur x dans l'expression qu'il restera à intégrer.* Il faudrait donc dériver x.

On pose : $v(x) = x \quad \rightarrow \quad v'(x) = 1$
$u'(x) = \sin(x) \quad \rightarrow \quad u(x) = -\cos(x)$

Ainsi, en intégrant par parties, on a :

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} u'(x)\,v(x)dx = [u(x)v(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} u(x)v'(x)\,dx$$

$$= [-\cos(x)\times x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\cos(x)\times 1\,dx$$

$$= [-x\cos(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\,dx$$

$$= -\frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + 0\times\cos(0) + [\sin(x)]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

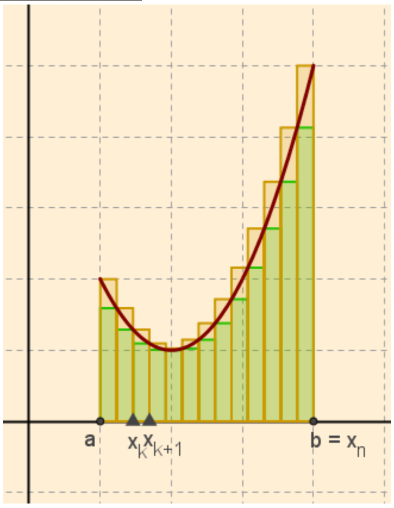
$$= \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin(0) = 1$$

Approcher une intégrale par somme d'aire de rectangle (programmation python)

Cas d'une fonction continue positive sur $[a\,;b]$.

→ on subdivise l'intervalle $[a\,;\,b]$ en n intervalles de longueur h= $\frac{b-a}{n}$ avec n ∈ N*

→ sur chaque intervalle de longueur h : $[x_k\,;x_{k+1}]$ (avec $0 \leq k \leq n-1$), on construit le rectangle « inférieur » R_k de hauteur f(x_k) et le rectangle « supérieur » R'_k de hauteur f(x_{k+1}).
L'aire sous la courbe sera comprise entre la somme des aires des rectangles « inférieurs » notée u et « supérieurs » notée v.




```python
from math import*
def f(x):
    return(x**2)

def rectangle(a,b,n):
    x=a
    u=0
    v=0
    h=(b-a)/n
    for k in range(1,n+1):
        u=u+h*f(x)
        x=x+h
        v=v+h*f(x)
    return(u,v)
```

Console Python

```
*
>>> rectangle(0,1,1000)
(0.33283350000000095, 0.33383350000000095)
>>>
```

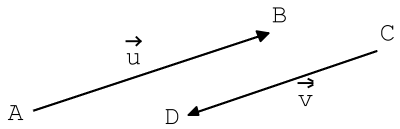
THEME 6 GEOMETRIE DANS L'ESPACE

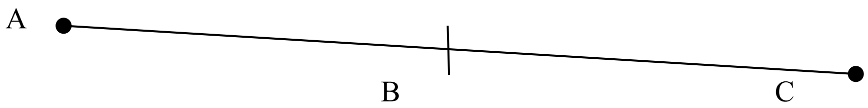
Vecteurs colinéaires , vecteurs directeurs de droite ou de plan

Définition : deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls sont **colinéaires** si et seulement si ils ont la même direction.
Autrement dit si , il existe un réel k non nul tel que $\vec{v} = k\ \vec{u}$

Propriété : Soit A,B,C et D quatre points.

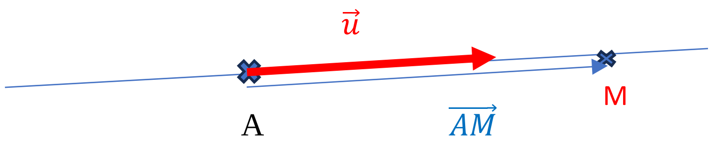
- Les droites (AB) et (CD) sont **parallèles** si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.



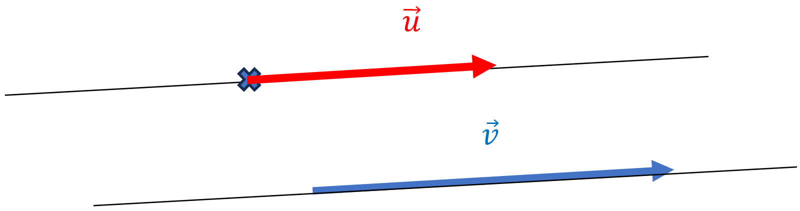


- Les points A,B et C sont **alignés** si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

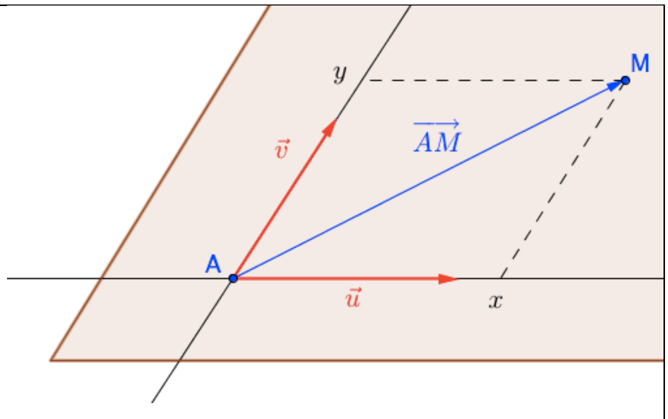
Définition : On appelle **vecteur directeur** d'une droite d tout vecteur non nul qui possède la même direction que la droite d.

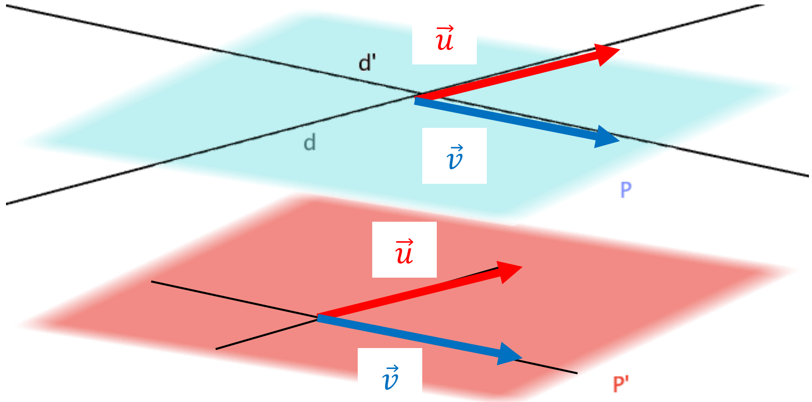


Propriété :
Soit un point A et un vecteur non nul de l'espace $\vec{u}$.
L'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{AM} = t\vec{u}$, avec $t \in \mathbb{R}$ est la droite passant par A de vecteur directeur $\vec{u}$
Remarque : la réciproque est vraie



Propriété : deux droites de l'espace sont parallèles si elles ont des vecteurs directeurs colinéaires

Propriété : Soit un point A et deux vecteurs de l'espace $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non colinéaires. L'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{AM} = x\vec{u} + y\vec{v}$, avec $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$ est le plan passant par A et dirigé par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Le triplet $(A; \vec{u}, \vec{v})$ est appelé **repère du plan.** Ces vecteurs sont appelés **vecteurs directeurs** du plan.	



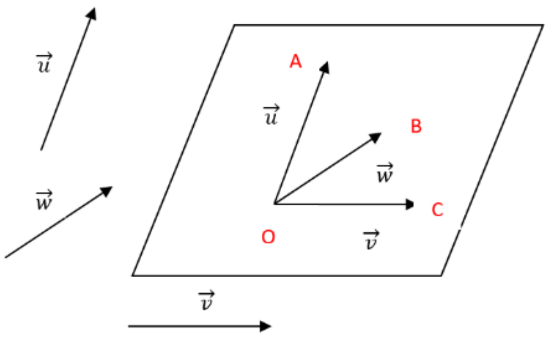
Propriété : Deux plans dirigés par le même couple de vecteurs non colinéaires sont parallèles.

Vecteurs coplanaires, parallélisme droite plan

Définition : Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace.

Tout vecteur de la forme $a\,\vec{u} + b\,\vec{v} + c\,\vec{w}$, avec a, b et c réels, est appelé **combinaison linéaire** des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$.

Définition :
soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de représentants
$\vec{u} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$ et $\vec{w} = \overrightarrow{OC}$
On dira que $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont **coplanaires** si et seulement si les points O,A,B et C appartiennent à un même plan.

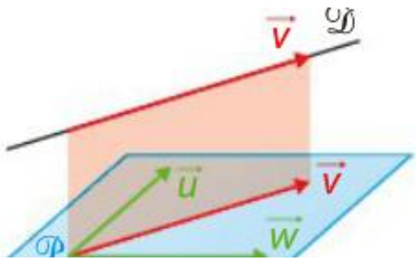


Plus simplement : 3 vecteurs sont coplanaires lorsque les QUATRE points les représentant le sont aussi.

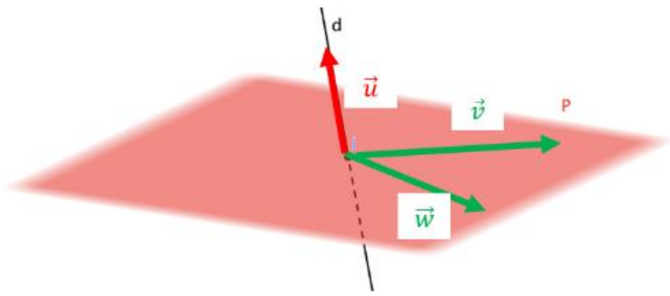
Caractérisation vectorielle de 3 vecteurs coplanaires ou non coplanaires:
soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace.

- $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont **coplanaires** si et seulement si il existe trois réels a , b et c **non tous nuls** tels que $a\,\vec{u} + b\,\vec{v} + c\,\vec{w} = \vec{0}$
- $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont non **coplanaires** si et seulement l'égalité $a\,\vec{u} + b\,\vec{v} + c\,\vec{w} = \vec{0}$ implique que $a = b = c = 0$

Conséquence sur la parallélisme droite-plan :
Une droite D est parallèle à un plan P si et seulement si un vecteur directeur de la droite D est coplanaire avec deux vecteurs non colinéaires (directeurs) du plan P.



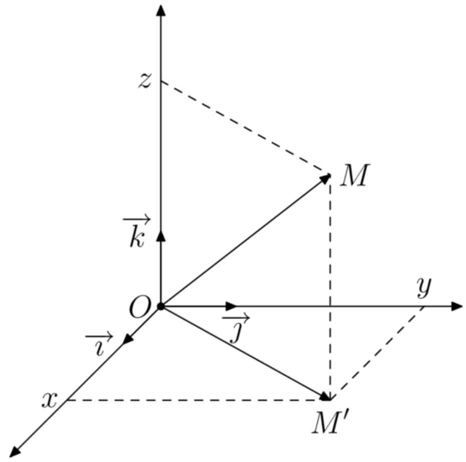
Une droite D coupe un plan P en un point si et seulement si un vecteur directeur de la droite D n'est pas coplanaire avec deux vecteurs non colinéaires (directeurs) du plan P



Repérage dans l'espace-représentation paramétrique de droite

Propriété - définition:

Soit $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$ et $\vec{k}$ trois vecteurs non coplanaires.
Pour tout vecteur $\vec{u}$, il existe un unique triplet $(x\,;y\,;z)$ tel que
$\vec{u} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$
(on dira que 3 vecteurs $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$ et $\vec{k}$ de l'espace non coplanaires forment une **base**)
On appelle repère de l'espace le quadruplet $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$.
La décomposition $\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$ donne les coordonnées $(x\,;y\,;z)$ du point M.



Propriétés : Soit deux points $A(x_A;y_A;z_A)$ et $B(x_B;y_B;z_B)$

● Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont : $\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$

● Les coordonnées du milieu du segment $[AB]$ sont :Le milieu du segment [AB] a pour coordonnées $\left(\frac{x_A+x_B}{2};\frac{y_A+y_B}{2};\frac{z_A+z_B}{2}\right)$

Exercice d'application: prouver que 3 points définissent un plan
Montrer que les points A(0 ; 4 ; 1) , B(1 ; 3 ; 0) et C(2 ; −1 ; −2) définissent un plan.

Il suffit de prouver que les points A,B et C ne sont pas alignés.
Pour cela , on peut prouver que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 1-0 \\ 3-4 \\ 0-1 \end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ .De plus $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix}$

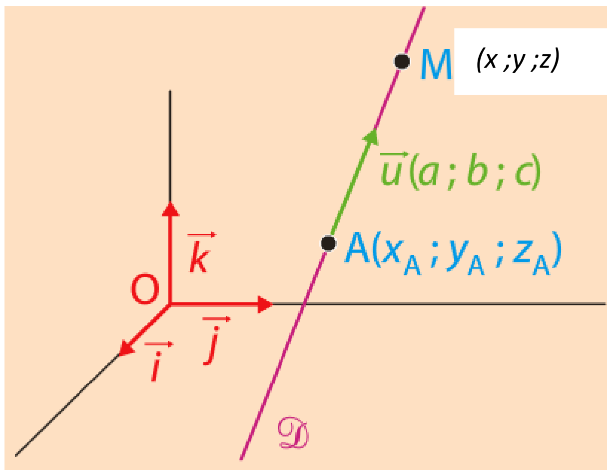
Il n'existe pas de réel k tel que $\begin{cases} 2 = k \\ -5 = -k \\ -3 = -k \end{cases}$ $(\overrightarrow{AC} \neq k\overrightarrow{AB})$ (les coordonnées ne sont pas proportionnelles)

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires. Ainsi ls points A,B et C définissent un plan.

Propriétés- définition :
Soit une droite d passant par un point $A(x_A;y_A;z_A)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

$M(x;y;z) \in d \Leftrightarrow$ Il existe un réel t tel que $\begin{cases} x = x_A + at \\ y = y_A + bt \\ z = z_A + ct \end{cases}$

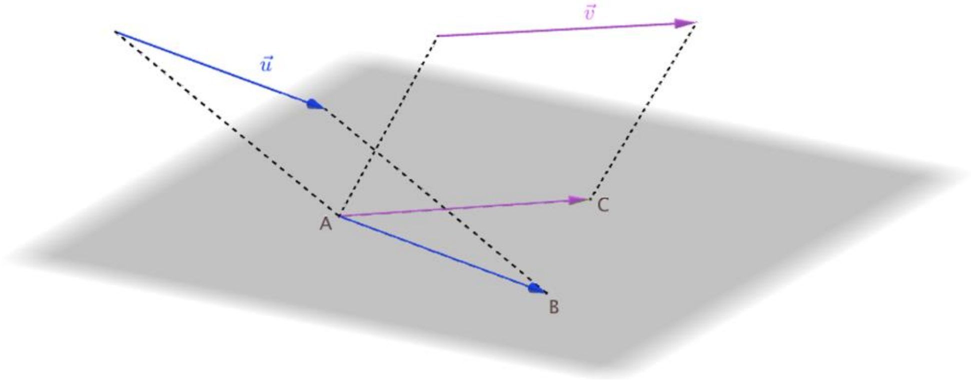
Le système d'équation : $\begin{cases} x = x_A + ta \\ y = y_A + tb \\ z = z_A + tc \end{cases}$ avec t∈ ℝ est la représentation paramétrique de la droite d passant par le point $A(x_A;y_A;z_A)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.



Exemple :La droite passant par le point $A(1;-2;3)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}$ a pour représentation paramétrique : $\begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = -2 + 5t \\ z = 3 - 3t \end{cases}$ (t∈ ℝ)

Produit scalaire dans l'espace

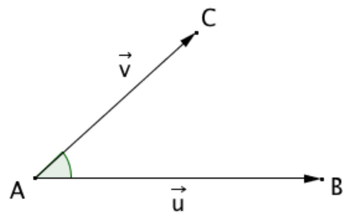
Définition : Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace. A, B et C trois points tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$. Il existe un plan P contenant les points A, B et C.
On appelle **produit scalaire de l'espace** de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ le produit $\vec{u}.\vec{v} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ dans le plan P.



On retrouve alors dans l'espace toutes les propriétés du produit scalaire dans le plan :

1ère formule du produit scalaire:
Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan.
On appelle **produit scalaire** de $\vec{u}$ par $\vec{v}$, noté $\vec{u}.\vec{v}$, le nombre réel défini par :

- $\vec{u}.\vec{v} = 0$, si l'un des deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est nul
- $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times cos(\vec{u}\ ;\ \vec{v})$, dans le cas contraire.

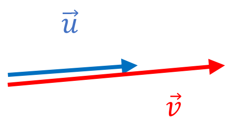


Cas particuliers :

- Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont deux représentants des vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ alors :

$\vec{u}.\vec{v} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AC}\| \times \cos(\widehat{BAC})$
Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont des vecteurs colinéaires de même sens ,

$\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$



- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont des vecteurs colinéaires de sens contraire ,

$\vec{u}.\vec{v} = -\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$

- $\vec{u}.\vec{u} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{u}\| = \|\vec{u}\|^2$

$\vec{u}.\vec{u}$ se note aussi $\vec{u}^2$ et est appelé carré scalaire de $\vec{u}$.
$\vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2$

Propriété de symétrie : Pour tout vecteur $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on a : $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$

Propriétés de bilinéarité : Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$, on a :
1) $\vec{u}.(\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w}$
2) $\vec{u}.(k\vec{v}) = (k\vec{u}).\vec{v} = k \times \vec{u}.\vec{v}$, avec k un nombre réel.

Propriétés (identités remarquables): Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on a :
1) $(\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u}.\vec{v} + \vec{v}^2$
2) $(\vec{u} - \vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u}.\vec{v} + \vec{v}^2$
3) $(\vec{u} + \vec{v}).(\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$

Formules de polarisation Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs. On a :

$\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2\right)$

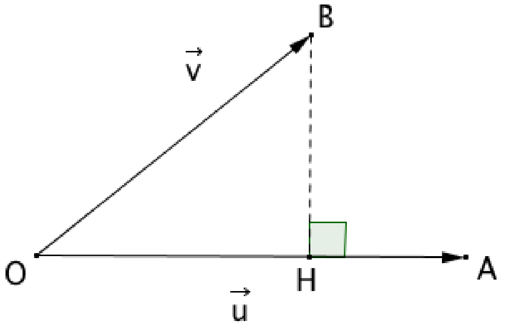
Et $\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right)$

2ème formule du produit scalaire:

Soit A, B et C trois points du plan. On a :$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\left(AB^2 + AC^2 - BC^2\right)$

Propriété :
Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u}.\vec{v} = 0$.

3ème formule du produit scalaire :
Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls du plan tels que $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$.
H est le projeté orthogonal du point B sur la droite (OA).



On a : $\vec{u}.\vec{v} = \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OH}$

4ème formule du produit scalaire

Propriétés : Dans un repère orthonormé de l'espace $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$:

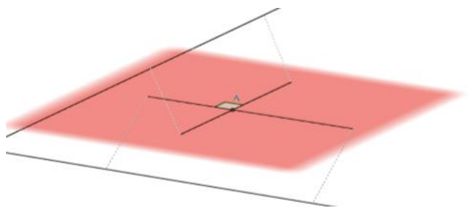
● Soit $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ deux vecteurs de l'espace.

$\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy' + zz'$ et $\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u}.\vec{u}} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

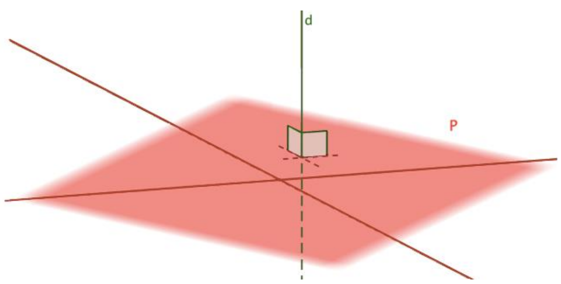
● Soit $A\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \end{pmatrix}$ deux points de l'espace.

$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$

Définition : Deux droites de l'espace sont orthogonales lorsque leurs parallèles passant par un point quelconque sont perpendiculaires.

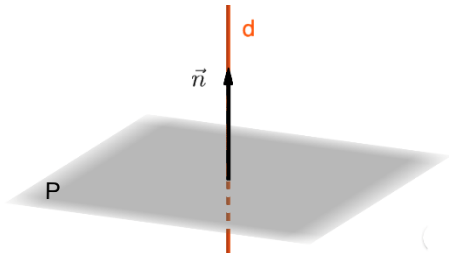


Propriété : Une droite d est orthogonale à un plan P si et seulement si elle est orthogonale à deux droites sécantes de P.

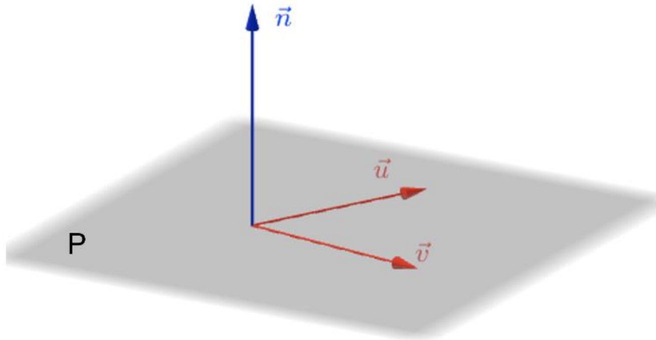


Propriété : Si une droite d est orthogonale à un plan P alors elle est orthogonale à toutes les droites de P.

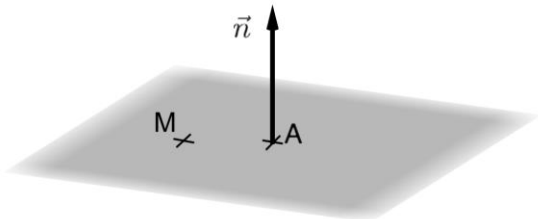
Définition : Un vecteur non nul $\vec{n}$ de l'espace est **normal** à un plan P si $\vec{n}$ est un vecteur directeur d'une droite orthogonale au plan P.



Propriété : Un vecteur non nul $\vec{n}$ de l'espace est normal à un plan P, s'il est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de la direction de P.

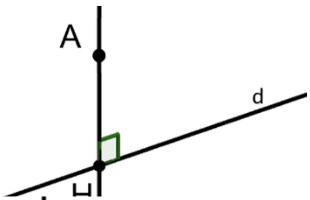


Propriété : Soit un point A et un vecteur $\vec{n}$ non nul de l'espace.
L'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM}.\vec{n} = 0$ est le plan passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$.

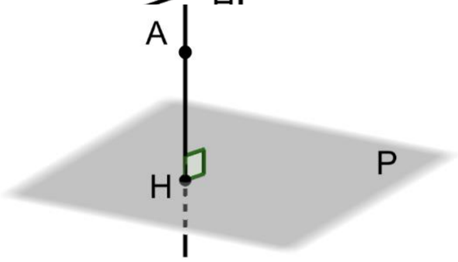


Définitions :

● Soit un point A et une droite d de l'espace.
Le **projeté orthogonal du point A sur la droite d** est le point H appartenant à d tel que la droite (AH) soit perpendiculaire à la droite d.



● Soit un point A et un plan P de l'espace.
Le **projeté orthogonal du point A sur le plan P** est le point H appartenant à P tel que la droite (AH) soit orthogonale au plan P.



Propriété : Le projeté orthogonal d'un point M sur un plan P est le point de P le plus proche de M.

Propriété : L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$.

Un plan P de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ non nul admet une équation de la forme $ax + by + cz + d = 0$, avec $d \in \mathbb{R}$.

Réciproquement, si a, b et c sont non tous nuls, l'ensemble des points $M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ tels que $ax + by + cz + d = 0$, avec $d \in \mathbb{R}$, est un plan.
Cette équation s'appelle **équation cartésienne** du plan P.

Exemple : Le plan d'équation cartésienne $x - y + 5z + 1 = 0$ a pour vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-1\\5\end{pmatrix}$.

Exercice : **Vidéo** : **mathssa.fr/espace8**

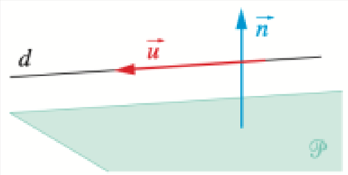
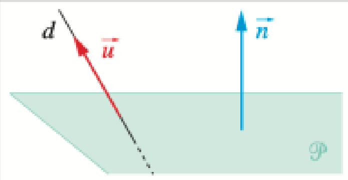
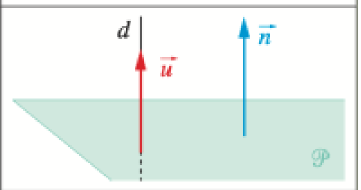
Dans un repère orthonormé, déterminer une équation cartésienne du plan P passant par le point $A(-1; 2; 1)$ et de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}3\\-3\\1\end{pmatrix}$.

● $\vec{n}\begin{pmatrix}3\\-3\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan P. Une équation cartésienne de P est donc de la forme $3x - 3y + z + d = 0$.

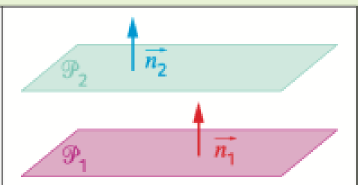
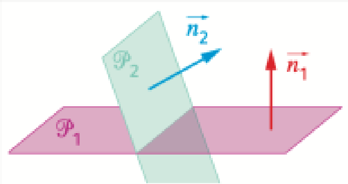
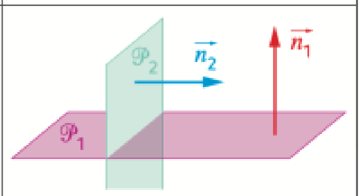
● Le point A appartient à P donc ses coordonnées vérifient l'équation :
$3 \times (-1) - 3 \times 2 + 1 + d = 0$ donc $d = 8$.
Une équation cartésienne de P est donc : $3x - 3y + z + 8 = 0$.

● Positions relatives

• d droite de vecteur directeur $\vec{u}$.
$\mathcal{P}$ plan de vecteur normal $\vec{n}$.
d et $\mathcal{P}$ sont :

parallèles	$\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$	
sécants	$\vec{u} \cdot \vec{n} \neq 0$	
orthogonaux	$\vec{u}$ et $\vec{n}$ colinéaires	

• $\mathcal{P}_1$ plan de vecteur normal $\vec{n_1}$.
$\mathcal{P}_2$ plan de vecteur normal $\vec{n_2}$.
$\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont :

parallèles	$\vec{n_1}$ et $\vec{n_2}$ colinéaires	
sécants	$\vec{n_1}$ et $\vec{n_2}$ non colinéaires	
perpendiculaires	$\vec{n_1} \cdot \vec{n_2} = 0$	

Méthode : Déterminer l'intersection d'une droite et d'un plan

Vidéo mathssa.fr/espace9

Dans un repère orthonormé, le plan P a pour équation $2x - y + 3z - 2 = 0$.
Soit $A(1; 2; -3)$ et $B(-1; 2; 0)$.
a) Démontrer que la droite (AB) et le plan P sont sécants.
b) Déterminer leur point d'intersection.

a) Un vecteur normal de P est $\vec{n}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.$(AB)$ et P sont sécants si $\vec{n}$ et $\overrightarrow{AB}$ ne sont pas orthogonaux.

On a : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$.
Comme : $\overrightarrow{AB}.\vec{n} = -2 \times 2 + 3 \times 3 \neq 0$, on conclut que (AB) et le plan P ne sont pas parallèles et donc sont sécants.

b) Une représentation paramétrique de la droite (AB) est :
$$\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 2 \\ z = -3 + 3t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$
Le point $M(x; y; z)$, intersection de (AB) et de P, vérifie donc le système suivant :
$$\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 2 \\ z = -3 + 3t \\ 2x - y + 3z - 2 = 0 \end{cases}$$

On a donc : $2(1 - 2t) - 2 + 3(-3 + 3t) - 2 = 0$ $5t - 11 = 0$ soit $t = \frac{11}{5}$

D'où : $\begin{cases} x = 1 - 2 \times \frac{11}{5} = -\frac{17}{5} \\ y = 2 \\ z = -3 + 3 \times \frac{11}{5} = \frac{18}{5} \end{cases}$ Ainsi la droite (AB) et le plan P sont sécants en $M\begin{pmatrix} -\frac{17}{5} \\ 2 \\ \frac{18}{5} \end{pmatrix}$.

THEME 7 DENOMBREMENT ET PROBABILITE

Combinatoire

Définition : Soit E un ensemble à n éléments. Et $k \leq n$.
Une **combinaison** de k éléments de E est un sous-ensemble de E.

Propriété : Soit E un ensemble à n éléments.
Le nombre de combinaisons de k éléments de E est égal à :

$$\frac{n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times (n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

Ce nombre se note : $\binom{n}{k}$.

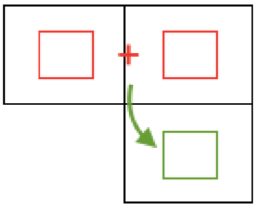
Cas particuliers :
Pour tout entier naturel n : $\binom{n}{0} = 1 \qquad \binom{n}{n} = 1 \qquad \binom{n}{1} = n$

Propriété de symétrie :
Pour tout entier naturel k tel que $0 \leq k \leq n$: $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$

Propriété du triangle de Pascal :
Pour tout entier naturel k tel que $0 \leq k \leq n$: $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$

Le triangle de Pascal

Vidéo mathssa.fr/trianglepascal
Le grand tableau qui suit s'appelle le triangle de Pascal.
Il se complète de proche en proche de la manière ci-contre :
Le triangle de Pascal peut être utilisé pour lire rapidement les coefficients
Par exemple, pour $n = 4$ et $k = 2$, on a : $\binom{n}{k} = \binom{4}{2} = 6$.



n \ k	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	$\binom{4}{2} = 6$	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1

Parties d'un ensemble

Propriété : Soit E un ensemble à n éléments. Le nombre de sous-ensemble de E est égal à :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n$$

Dénombrement

Arrangement, permutation, combinaison… : lequel choisir ?

Vidéo mathssa.fr/combinatoire

On choisit k éléments dans un ensemble à n éléments.

RÉSULTAT ORDONNÉ

OUI → RÉPÉTITION

- OUI → k-uplets $\to n^k$ ➤ *Exemple 1*
- NON →
  - k-uplets d'éléments distincts (arrangements) $\to \dfrac{n!}{(n-k)!}$ ➤ *Exemple 2*
  - Permutations ($k = n$) : $\to n!$ ➤ *Exemple 3*

NON → Combinaisons : $\to \binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}$ ➤ *Exemple 4*

Exemple 1

Nombre de mots composés de 3 lettres de l'alphabet ?

ORDONNÉ - RÉPÉTITION

→ Nombre de triplet d'un ensemble à 26 éléments = 26^3.

Exemple 2

Nombre de mots composés de 3 lettres de l'alphabet toutes différentes ?

ORDONNÉ – PAS RÉPÉTITION

→ Nombre de triplets d'éléments tous distincts (arrangements) d'un ensemble à 26 éléments = $26 \times 25 \times 24$.

Exemple 3

Nombre d'anagrammes du mot « MDR ».

ORDONNÉ – PAS RÉPÉTITION

→ Nombre de permutations à 3 éléments = 3!

Exemple 4

Nombre de possibilités de tirer simultanément 3 jetons parmi 6 jetons marqués de 6 lettres toutes différentes.

NON ORDONNÉ – PAS RÉPÉTITION

→ Nombre de combinaisons à 3 éléments parmi 6 = $\binom{6}{3}$.

Rappels de probabilité de 1ère

Propriété : $P(A) + P(\bar{A}) = 1$

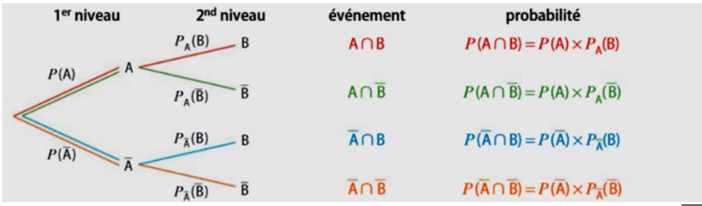
Corollaire : $P(\bar{A})$=1 − $P(A)$ et $P(A)$=1 − $P(\bar{A})$

Théorème :
Si A et B sont deux événements d'une expérience aléatoire, alors :
$$P(A \cup B) + P(A \cap B) = P(A) + P(B)$$

Corollaires:
* $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
* $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$
*Si deux événements A et B sont incompatibles alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

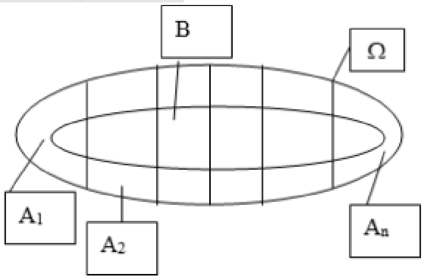
Définition : Soit A et B deux événements avec $P(A) \neq 0$.
On appelle **probabilité conditionnelle** de B sachant A, notée $P_A(B)$ et est définie par :
$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$.

Propriété :
$P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$



Pour s'entrainer :http://bref.jeduque.net/5fbiv9

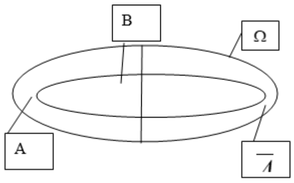
Formule des probabilités totales :



Définition : une partition de l'univers Ω est un ensemble d'évènements deux à deux incompatibles et dont la réunion est Ω.

Théorème : On suppose que les évènements $A_1, A_2, \ldots, A_n$ forment une partition de Ω.
Alors pour tout évènement B, $P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + \ldots + P(B \cap A_n)$

Conséquence :
soit A et B deux évènements alors : $P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap \bar{A})$



Indépendance de deux évènements

Définition :
Deux évènements A et B sont dits **indépendants** si et seulement si $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$
(ou $P_A(B) = P(B)$)

Pour s'entrainer :http://bref.jeduque.net/4dghux et mathssa.fr/conditionnement

Variables aléatoires

Définition d'une variable aléatoire :

Une **variable aléatoire** X est une **fonction** définie sur un univers Ω et à valeur dans $\mathbb{R}$.

Définition de l'espérance , de la variance et de l'écart-type:

On se donne la loi de probabilité d'une variable aléatoire X

valeurs possibles x_i	x_1	x_2	…	x_n
probabilités $P(X=x_i)$	$P(X=x_1) = p_1$	$P(X=x_2) = p_2$	…	$P(X=x_n) = p_n$

-L'**espérance mathématique** de la variable aléatoire X est :

$$E(X) = p_1x_1 + p_2x_2 + \ldots + p_nx_n = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$$

- La **variance** de la variable aléatoire X est :

$$V(X) = p_1\left(x_1 - E(X)\right)^2 + p_2\left(x_2 - E(X)\right)^2 + \ldots + p_n\left(x_n - E(X)\right)^2 \left(= \sum_{i=1}^{n} p_i(x_i - E(X))^2\right)$$

- L'**écart-type** de la loi de probabilité de X est :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

Exemple : Soit l'expérience aléatoire : "On tire une carte dans un jeu de 32 cartes."
On considère le jeu suivant :

- Si on tire un cœur, on gagne 2€.
- Si on tire un roi, on gagne 5€.
- Si on tire une autre carte, on perd 1€.

On appelle X la variable aléatoire qui à une carte tirée associe un gain ou une perte.
Déterminer l'espérance, la variance et l'écart-type de la variable aléatoire X.

valeurs possibles x_i	-1	2	5	7
Probabilités $P(X = x_i)$	$\frac{21}{32}$	$\frac{7}{32}$	$\frac{3}{32}$	$\frac{1}{32}$

$$E(X) = (-1) \times \frac{21}{32} + 2 \times \frac{7}{32} + 5 \times \frac{3}{32} + 7 \times \frac{1}{32} = \frac{-21+14+15+7}{32} = \frac{15}{32} = 0{,}46875$$

$$V(X) = \left(-1 - \frac{15}{32}\right)^2 \times \frac{21}{32} + \left(2 - \frac{15}{32}\right)^2 \times \frac{7}{32} + \left(5 - \frac{15}{32}\right)^2 \times \frac{3}{32} + \left(7 - \frac{15}{32}\right)^2 \times \frac{1}{32} = \ldots = \frac{5311}{1024} \approx 5{,}2$$

$$\sigma(X) = \sqrt{\frac{5311}{1024}} \approx 2{,}277$$

Expériences indépendantes

Définition : Deux épreuves qui se succèdent sont **indépendantes**, si l'issue de la première épreuve n'influe pas sur l'issue de la deuxième épreuve.

Propriété : On considère deux épreuves indépendantes.
La probabilité d'obtenir l'issue A pour la première épreuve suivie de l'issue B pour la deuxième épreuve est : $P(A\,;B) = P(A) \times P(B)$.

Epreuve de Bernoulli – loi de Bernoulli

Définition : Une **épreuve de Bernoulli** est une expérience aléatoire à deux issues que l'on peut nommer "succès" ou "échec".

Définition : Une **loi de Bernoulli** est une loi de probabilité qui suit le schéma suivant :
- la probabilité d'obtenir un succès est égale à p,
- la probabilité d'obtenir un échec est égale à $1 - p$.

p est le paramètre de la loi de Bernoulli.

Convention :
Au succès, on peut associer le nombre 1 et à l'échec, on peut associer le nombre 0.
Soit la variable aléatoire X qui suit une loi de Bernoulli de paramètre p.
Dans ce cas, la loi de probabilité de X peut être présentée dans le tableau :

x_i	1	0
$P(X = x_i)$	p	$1 - p$

Propriété :
Soit X une variable aléatoire qui suit la loi de Bernoulli de paramètre p, alors :
$$E(X) = p \qquad V(X) = p(1-p)$$

Schéma de Bernoulli – coefficient binomial

Définition :
Un **schéma de Bernoulli** est la répétition de n épreuves de Bernoulli **identiques et indépendantes** pour lesquelles la probabilité du succès est p.

Exemple :
La répétition de 10 lancers d'une pièce de monnaie non truquée est un schéma de Bernoulli de paramètres $n = 10$ et $p = \frac{1}{2}$.

Définition :
On réalise une expérience suivant un schéma de Bernoulli de paramètres n et p.
Soit un entier naturel k tel que $0 \leq k \leq n$
On appelle **coefficient binomial** ou **combinaison de k parmi n**, le nombre de chemins conduisant à k succès parmi n épreuves sur l'arbre représentant l'expérience.
Ce nombre se note : $\binom{n}{k}$.

Loi binomiale

Définition :
La variable aléatoire X qui compte le **nombre de succès** dans un **schéma de Bernoulli** suit la **loi binomiale** de **paramètres *n*** et ***p*** et est notée *B(n ;p)*.

Propriété :
Soit X une variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètres n et p.
Pour tout entier naturel k tel que $0 \leq k \leq n$, on a :

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Exemple : Calculer les probabilités d'une loi binomiale
Vidéo mathssa.fr/binom

Une maladie affecte la population de canards d'une région du sud-ouest de la France. Elle touche 0,5% des canards. On choisit au hasard 100 canards. La population est assez grande pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 100 canards.
On appelle X la variable aléatoire qui compte le nombre de canards malades.
1.Justifier que X suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.
2.Déterminer la probabilité qu'exactement 2 canards soient malades. (on écrira une formule avant de passer au calcul)
3.Donner la probabilité qu'au plus 2 canards soient malades.
4.Un vétérinaire estime qu'il y a à peu près 40% de chances qu'au moins un canard soit malade dans un échantillon de 100 canards. Qu'en pensez-vous ?

Correction
1 .On répète 100 fois de suite de façon identique et indépendante une épreuve à deux issues :
le canard est malade (succès) ; le canard est sain (échec).La **probabilité du succès** est égale à $0{,}005$.
Cette expérience est un **schéma de Bernoulli de paramètres $n = 100$ et $p = 0,005$.**
La variable aléatoire X qui compte le nombre de succès dans ce schéma de Bernoulli suit donc la loi binomiale de paramètres : $n = 100$ et $p = 0{,}005$ $\ soit\ B(100; 0{,}005)$

2. Nombre de combinaisons de 2 succès parmi 100 épreuves.

Probabilités des 2 succès.

Probabilités des 100 − 2 = 98 échecs.

$$P(X = 2) = \binom{100}{2} 0{,}005^2 (1 - 0{,}005)^{100-2}$$
$$= 4\,950 \times 0{,}005^2 \times 0{,}995^{98} \approx 0{,}076$$

La probabilité qu'exactement 2 canards soient malades est de 0,076.

Vérification sur la calculatrice: menu distrib puis choisir binomFdp(100,0.005,2).

3. $P(X \leq 2) = binomFrep(100{,}0.005{,}2) \approx 0{,}986$
La probabilité qu'au plus 2 canards soient malades est de 0,986.

4. $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \binom{100}{0} 0{,}005^0 (1 - 0{,}005)^{100} = 1 - 0{,}995^{100} \approx 0{,}394$

Il y a à peu près 40% de chances qu'au moins un canard soit malade dans un échantillon de 100 canards.
L'affirmation est donc vraie.

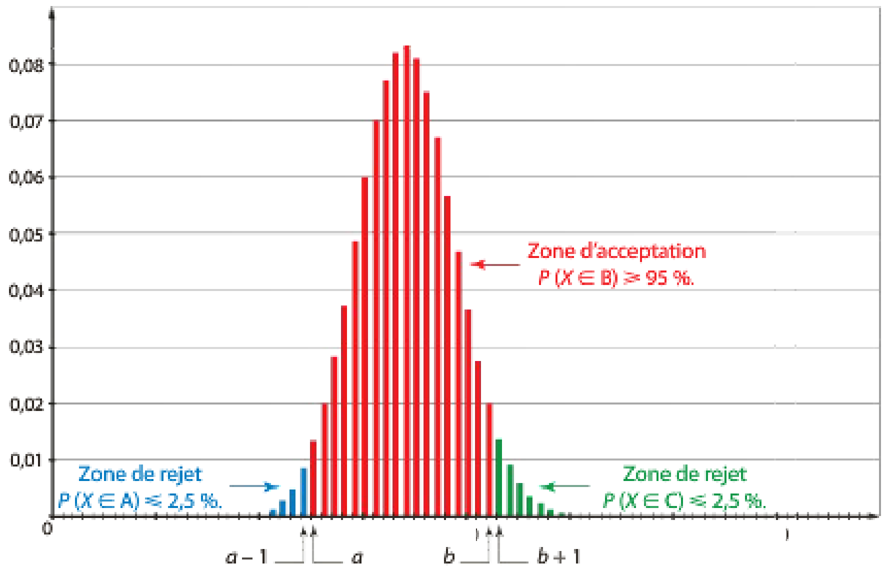
Propriété :
Soit X une variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètres n et p.
$E(X) = np$ $\qquad$ $V(X) = np(1-p)$ $\qquad$ $\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$

Exemple : **calculer de l'espérance , variance et écart-type**
Vidéos : mathssa.fr/binom2 et mathssa.fr/binom3
Une maladie affecte la population de canards d'une région du sud-ouest de la France. Elle touche 5% des canards. On choisit au hasard 100 canards. La population est assez grande pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 100 canards.
On appelle S la variable aléatoire qui compte le nombre de canards malades.
On admet que la variable aléatoire S suit la loi binomiale de paramètres $p = 0{,}05$ et $n = 100$.
Calculer $E(S)$, $V(S)$ et $\sigma(S)$

Correction
La variable aléatoire S suit la loi binomiale de paramètres $p = 0{,}05$ et $n = 100$.
$E(S) = 0{,}05 \times 100 = 5$, $V(S) = 100 \times 0{,}05 \times 0{,}95 = 4{,}75$, $\sigma(S) = \sqrt{4{,}75} \approx 2{,}18$
En moyenne, sur un échantillon de 100 canards, on peut espérer avoir 5 canards malades.

Exemple : Chercher un intervalle I pour lequel la probabilité $P(X \in I)$ est inférieure à ou supérieure à une valeur donnée
On fait l'hypothèse que 55% des électeurs ont voté pour le candidat A. On interroge au hasard à la sortie des urnes 50 personnes.
Soit X est la variable aléatoire qui compte le nombre k de personnes qui ont voté pour le candidat A.
a) Déterminer des réels a et b tels que : $P(a \leq X \leq b) \geq 0{,}95$
b) Donner une interprétation du résultat précédent.

Correction
a) La variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètre $n = 50$ et $p = 0{,}55$.



On dresse le tableau des probabilités cumulées : (dans f(x) , écrire binomFrep(50,0.55,X)

k	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
$P(X \leq k)$	0,002	0,005	0,01	0,023	0,044	0,077	0,127	0,196	0,283	0,386	0,498

k	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38
$P(X \leq k)$	0,61	0,713	0,802	0,872	0,923	0,957	0,978	0,989	0,995	0,998	0,999

On cherche a et b tel que : $P(a \leq X \leq b) \geq 0{,}95$.
On commence par déterminer a le plus petit possible, tel que : $P(X \leq a) > 0{,}025$.
On lit : $a = 21$.
On détermine ensuite b, le plus petit possible, tel que : $P(X \leq b) \geq 0{,}975$.
On lit : $b = 34$.
Ainsi : $P(21 \leq X \leq 34) \geq 0{,}95$
b) Or, $\frac{21}{50}$ = 42 % et $\frac{34}{50}$ = 68 %.Pour un échantillon de 50 personnes, il y a au moins 95% de chance qu'il y ait entre 42 % et 68 % des électeurs qui votent pour le candidat A.

A noter : L'intervalle [0,42 ; 0,68] s'appelle **intervalle de fluctuation au seuil de 95 %**.

Sommes de variables aléatoires - échantillon

Vidéo :mathssa.fr/sommeva

Définition :
Soit X et Y deux variables aléatoires. La **loi de probabilité** de la variable aléatoire somme $X + Y$ est donnée par :

$$P(X + Y = k) = \sum_{i+j=k} P((X = i) \cap (Y = j))$$

Si, de plus, les évènements $(X = i)$ et $(Y = j)$ sont indépendants, alors on a :

$$P(X + Y = k) = \sum_{i+j=k} P(X = i) \times P(Y = j)$$

On dit dans ce cas que les **variables aléatoires X et Y sont indépendantes**.

Propriétés :
● $E(aX + b) = aE(X) + b$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$
● $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$
● $V(aX + b) = a^2V(X)$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$
● Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes : $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$

Définition :
Un **échantillon de taille n d'une loi de probabilité** est une liste de n variables aléatoires **indépendantes** suivant cette loi.

Propriétés :
Soit $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ un échantillon de taille n de variables aléatoires indépendantes suivant une même loi. On pose : $S = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$, alors on a :

- $E(S) = E(X_1) + E(X_2) + \cdots + E(X_n)$
- $V(S) = V(X_1) + V(X_2) + \cdots + V(X_n)$

Propriété :
Soit S une variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètres n et p.
$E(S) = np$ $\quad$ $V(S) = np(1 - p)$ $\quad$ $\sigma(S) = \sqrt{V(S)}$

Exemple : somme de variables aléatoires indépendantes
On interroge au hasard 10 étudiants. Les variables $N_1, N_2, \dots, N_{10}$ modélisent la note obtenue à l'examen par chacun d'entre eux. On admet que ces variables aléatoires sont indépendantes et suivent la même loi binomiale de paramètres (20 ;0,615) .
Soit S la variable définie par : $S = N_1 + N_2 + \cdots + N_{10}$.
Calculer l'espérance E(S) et la variance V(S) de la variable aléatoire S.

Correction :
$E(N_i) = 20 \times 0{,}615 = 12{,}3$, $V(N_i) = 20 \times 0{,}615 \times (1 - 0{,}615) = 4{,}7355$.
$(N_1, N_2, \dots, N_{10})$ est un échantillon de taille 10 de variables aléatoires indépendantes suivant une même loi.

On a : $S = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$, alors on a :

- $E(S) = E(N_1) + E(N_2) + \cdots + E(N_{10}) = 12{,}3 + 12{,}3 + \cdots + 12{,}3 = 123$
- $V(S) = V(N_1) + V(N_2) + \cdots + V(N_{10}) = 10 \times 4{,}735 = 47{,}355$

LOI DES GRANS NOMBRES

Vidéo : **mathssa.fr/loigrandsnombres**

Définition :

Soit $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ un échantillon de taille n de variables aléatoires indépendantes suivant une même loi.

La variable aléatoire moyenne M_n de l'échantillon est donnée par :

$$M_n = \frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n).$$

Propriété :

Soit une variable aléatoire X et soit un échantillon $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ de taille n de variables aléatoires indépendantes suivant la même loi que X.

$$E(M_n) = E(X) \qquad V(M_n) = \frac{1}{n}V(X) \qquad \sigma(M_n) = \frac{1}{\sqrt{n}}\sigma(X)$$

Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Propriété :

Soit une variable aléatoire X. Pour tout réel strictement positif δ, on a :

$$P(|X - E(X)| \geq \delta) \leq \frac{V(X)}{\delta^2}$$

Exemple : inégalité de Bienaymé-Tchebychev

On interroge au hasard 10 étudiants. Les variables $N_1, N_2, \dots, N_{10}$ modélisent la note obtenue à l'examen par chacun d'entre eux. On admet que ces variables aléatoires sont indépendantes et suivent la même loi .Soit S la variable définie par : $S = N_1 + N_2 + \cdots + N_{10}$. On admet que $E(S) = 123$ et $V(S) = 47{,}355$

On considère la variable aléaroire $M = \frac{S}{10}$.

a) Que modélise M dans le contexte de l'exercice ?Justifier que E(M)=12,3 et V(M)=0,47355.

b)A l'aide de l'inégalité de **Bienaymé-Tchebychev**, justifier l'affirmation ci-dessous :

« la probabilité que la moyenne des notes de 10 étudiants pris au hasard soit strictement comprise entre 10,3 et 14,3 est d'au moins 80% ».

Correction :

a)La variable aléatoire M donne la moyenne des notes obtenues par un échantillon de 10 étudiants choisis au hasard.$E(M) = \frac{1}{10}E(S) = 12{,}3$ *et* $V(M) = (\frac{1}{10})^2 V(S) = 0{,}47355$

b)On applique l'inégalité de **Bienaymé-Tchebychev pour** $\delta = 2$:$P(|M - E(M)| \geq 2) \leq \frac{V(M)}{2^2}$

$P(|M - 12{,}3| \geq 2) \leq \frac{0{,}47355}{4}$

$P(|M - 12{,}3| \geq 2) \leq 0{,}1183875$

On utilise l'évènement contraire :

$1 - P(|M - 12{,}3| < 2) \leq 0{,}1183875$

$P(|M - 12{,}3| < 2) \geq 0{,}8816125$

$P(10{,}3 < M < 14{,}3) \geq 0{,}8816125$

« la probabilité que la moyenne des notes de 10 étudiants pris au hasard soit strictement comprise entre 10,3 et 14,3 est d'au moins 80% ».

Inégalité de concentration

Propriété :
Soit la variable aléatoire moyenne M_n d'un échantillon de taille n de la variable aléatoire X. Pour tout réel strictement positif δ, on a :

$$P(|M_n - E(X)| \geq \delta) \leq \frac{V(X)}{n\,\delta^2}$$

Exemple : Appliquer l'inégalité de concentration pour déterminer la taille d'un échantillon

Vidéo mathssa.fr/concentration

Soit une variable aléatoire X qui suit la loi de Bernoulli de paramètre 0,2.
On considère un échantillon de n variables aléatoires suivant la loi de X.
On appelle M_n la variable aléatoire moyenne associée à cet échantillon.
Déterminer la taille n de l'échantillon tel que la probabilité que la moyenne M_n appartienne à l'intervalle $]0{,}03\,;0{,}37[$ soit supérieure à 0,95.

Correction
On cherche à calculer n tel que $P(0{,}03 < M_n < 0{,}37) \geq 0{,}95$
Dans l'idée d'appliquer l'inégalité de concentration, on fait apparaitre l'espérance de X dans l'inégalité.Or, $E(X) = p = 0{,}2$
Ainsi, on cherche n tel que : $P(0{,}03 - 0{,}2 < M_n - 0{,}2 < 0{,}37 - 0{,}2) \geq 0{,}95$

Soit : $P(-0{,}17 < M_n - 0{,}2 < 0{,}17) \geq 0{,}95$

Soit encore : $P(|M_n - 0{,}2| < 0{,}17) \geq 0{,}95$

Et donc, en considérant l'évènement contraire :

$$1 - P(|M_n - 0{,}2| \geq 0{,}17) \geq 0{,}95$$
$$P(|M_n - 0{,}2| \geq 0{,}17) \leq 0{,}05$$

En prenant $\delta = 0{,}17$ dans l'inégalité de concentration, on a :

$$P(|M_n - E(X)| \geq \delta) \leq 0{,}05, \text{ avec } \frac{V(X)}{n\,\delta^2} = 0{,}05.$$

Or, $V(X) = p(1-p) = 0{,}2 \times 0{,}8 = 0{,}16$
On cherche donc un entier n tel que : $\dfrac{0{,}16}{n\,0{,}17^2} \leq 0{,}05$
Et donc : $n \geq \dfrac{0{,}16}{0{,}05 \times 0{,}17^2} \approx 110{,}7$
Pour $n \geq 111$, la probabilité que la moyenne M_n appartienne à l'intervalle $]0{,}03\,;0{,}37[$ est supérieure à 0,95.

Loi des grands nombres

Propriété :
Soit la variable aléatoire moyenne M_n d'un échantillon de taille n de la variable aléatoire X. Pour tout réel strictement positif δ, on a :

$$\lim_{n \to +\infty} P(|M_n - E(X)| \geq \delta) = 0$$

Remarque : La loi des grands nombres traduit le fait que plus la taille de l'échantillon d'une variable aléatoire X est grande, plus l'écart entre la moyenne de cet échantillon et l'espérance de la variable aléatoire X est faible.